Correction

Exercice 1

1. En 2010, le nombre d'arbres était égal à 50000 c'est à dire à 50 milliers.
   Si u_n est égal au nombre d'arbres en milliers en l'an $2010+n$, on peut donc poser $u_0=50$.
   Chaque année, on abat 5 % des arbres donc on doit multiplier u_n par $1-0,05=0,95$. Chaque année, on replante 3000 arbres c'est à dire 3 milliers d'arbres donc on doit ajouter 3 au nombre $0,95\,u_n$. On déduit que le nombre d'arbres en l'an $2010+(n+1)$, en milliers, est égal à $u_{n+1}=0,95\,u_n+3$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=60-u_n$.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :
   $$v_{n+1}=60-u_{n+1}=60-(0,95\,n+3)=57-0,95\,u_n=0,95\left(\frac{57}{0,95}-u_n\right)=0,95(60-u_n)=0,95\,v_n$$
   donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=0,95$.
   (b) $v_0=60-u_0=60-50=10$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\, v_n=10\times0,95^n$.
   (c) $\forall\, n\in\mathbb{N},\, v_n=60-u_n$ donc $u_n=60-v_n=60-10\times0,95^n$.
3. En $2010+5=2015$, le nombre d'arbres sera égal à $u_5=(60-10\times0,95^5)\times1000\approx52262$ arrondi à l'unité.
4. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :
   $$u_{n+1}-u_n=(60-10\times0,95^{n+1})-(60-10\times0,95^n)=-10\times0,95^{n+1}+10\times0,95^n$$
   $$u_{n+1}-u_n=(10\times0,95^n)\times(-0,95+1)=(10\times0,95^n)\times0,05=0,5\times0,95^n$$
   (b) $\forall\, n\in\mathbb{N},\, u_{n+1}-u_n=0,5\times0,95^n>0$ donc (u_n) est croissante.
5. On cherche le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n>55$.
   A l'aide de la calculatrice, on a $u_{13}\approx54,866$ et $u_{14}\approx55,123$ donc à partir de 2024, le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé 55000.

Remarque : à la calculatrice, on observe que les termes de la suite (u_n) se rapprochent de plus en plus de 60 sans atteindre 60. Cela signifie que le nombre d'arbres de la forêt sera croissant mais n'atteindra jamais les 60000 arbres. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=60$.

Exercice 2

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :
   $$v_{n+1}=4\,u_{n+1}-6(n+1)+15=4\left(\frac{1}{3}u_n+n-1\right)-6\,n-6+15$$
   $$v_{n+1}=4\left(\frac{1}{3}u_n+n-1\right)-6\,n-6+15$$
   $$v_{n+1}=\frac{4}{3}u_n+4\,n-4-6\,n+9$$
   $$v_{n+1}=\frac{4}{3}u_n-2\,n+5$$
   $$v_{n+1}=\frac{1}{3}(4\,u_n-6\,n+15)$$
   $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme
   $v_0=4\,u_0-6\times0+15=19$

2. On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=19\times(\frac{1}{3})^n$. Or, $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=4u_n-6n+15$

   donc $\forall n\in\mathbb{N}, 19\times(\frac{1}{3})^n=4u_n-6n+15$

   donc $\forall n\in\mathbb{N}, 4u_n=6n-15+19\times(\frac{1}{3})^n$

   donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{6n-15}{4}+\frac{19}{4}\times(\frac{1}{3})^n$

   donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{19}{4}\times(\frac{1}{3})^n+\frac{6n-15}{4}$

3. Posons $\forall n\in\mathbb{N}, t_n=\frac{19}{4}\times(\frac{1}{3})^n$ et $w_n=\frac{6n-15}{4}$. Montrons (t_n) est géométrique.

   Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :

   $t_{n+1}=\frac{19}{4}\times(\frac{1}{3})^{n+1}=\frac{19}{4}\times(\frac{1}{3})^n\times(\frac{1}{3})^1=t_n\times(\frac{1}{3})$ donc (t_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $t_0=\frac{19}{4}$.

   Montrons que (w_n) est arithmétique.

   Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :

   $w_{n+1}-w_n=(\frac{6(n+1)-15}{4})-(\frac{6n-15}{4})=\frac{(6n+6-15-6n+15)}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

   donc (w_n) est arithmétique de raison $r=\frac{3}{2}$ et de premier terme $w_0=-\frac{15}{4}$.

4. $T_n=t_0+...+t_n=\frac{19}{4}\times\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{19}{4}\times\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right)=\frac{19}{4}\times\frac{3}{2}\times\left(1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right)$

   $T_n=\frac{19}{4}\times\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{19}{4}\times\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right)=\frac{57}{8}\times\left(1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right)$

   $W_n=w_0+...+w_n=(n+1)\times\left(\frac{w_0+w_n}{2}\right)=(n+1)\times\left(\frac{-\frac{15}{4}+\frac{(6n-15)}{4}}{2}\right)$

   $W_n=(n+1)\times(\frac{6n-30}{8})=\frac{(n+1)(3n-15)}{4}=\frac{3(n+1)(n-5)}{4}$

   On déduit $U_n=T_n+W_n=\frac{57}{8}\times\left(1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right)+\frac{3(n+1)(n-5)}{4}$.

Exercice 3

1. (a) A la première tonte, il récupère 120 litres de gazon donc $V_1 = 120\,litres$.

$V_2 = \frac{1}{4} \times 120 + 120 = 30 + 120 = 150\,litres$

$V_3 = \frac{1}{4} \times 150 + 120 = 37{,}5 + 120 = 157{,}5\,litres$

(b) $V_4 = \frac{1}{4} \times 157{,}5 + 120 = 39{,}375 + 120 = 159{,}375\,litres$

$V_5 = \frac{1}{4} \times 159{,}375 + 120 = 39{,}84375 + 120 = 159{,}84375\,litres$

$V_6 = \frac{1}{4} \times 159{,}84375 + 120 = 39{,}96099375 + 120 = 159{,}96099375\,litres$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n + 120 = 0{,}25\,V_n + 120$.

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, t_n = 160 - V_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, on a :

$t_{n+1} = 160 - V_{n+1} = 160 - (0{,}25\,V_n + 120) = 40 - 0{,}25\,V_n$

$t_{n+1} = 0{,}25(\frac{40}{0{,}25} - V_n) = 0{,}25(160 - V_n) = 0{,}25\,t_n$ donc (t_n) est géométrique de raison $q = 0{,}25 = \frac{1}{4}$ et de premier terme $t_1 = 160 - V_1 + 160 - 120 = 40$.

(b) On déduit $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0, t_n = t_1 \times q^{n-1} = 40 \times (\frac{1}{4})^{n-1}$.

Or, $t_n = 160 - V_n$ donc $V_n = 160 - t_n = 160 - 40 \times (0{,}25)^{n-1}$.

(c) $-1 < 0{,}25 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} (0{,}25)^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} V_n = 160$.