

## La calculatrice est autorisée

## Exercice 1

1. Par lecture graphique,  $f(4)=3$  et  $f'(4)=2$ .
2. Par lecture graphique,  $T_0: y = -2x + 3$
3. Par lecture graphique,  $C_f$  a deux tangentes horizontales l'une au point d'abscisse  $a = -1$  et l'autre au point d'abscisse  $a = 2$ . On déduit que  $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$  ou  $a = 2$ .

## Exercice 2

Soit  $x > 0$ . On a :

$$f'_1(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x^3 - 3x^2 \times \sqrt{x}}{(x^3)^2} = \frac{\frac{x^3}{2\sqrt{x}} - \frac{3x^2 \sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x^6} = \frac{x^3 - 6x^3}{2\sqrt{x}x^3} = \frac{-5x^3}{2\sqrt{x}x^3} = \frac{-5}{2\sqrt{x}x^3} = \frac{-5\sqrt{x}}{2x^4}$$

Soit  $x > 0$ . On a :

$$f'_2(x) = \frac{2x \times 2\sqrt{x} - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 4)}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{4x\sqrt{x} - \frac{(x^2 - 4)}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{4x\sqrt{x}\sqrt{x} - x^2 + 4}{4x\sqrt{x}} = \frac{4x^2 - x^2 + 4}{4x\sqrt{x}}$$

$$f'_2(x) = \frac{3x^2 + 4}{4x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(3x^2 + 4)}{4x^2}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $f'_3(x) = \frac{3x^2(x^4 + 1) - 4x^3(x^3 - 1)}{(x^4 + 1)^2} = \frac{3x^6 + 3x^2 - 4x^6 + 4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-x^6 + 4x^3 + 3x^2}{(x^4 + 1)^2}$

## Exercice 3

1.  $f$  est dérivable sur  $]-2; +\infty[$  comme quotient de fonctions affines dérivables sur  $]-2; +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $]-2; +\infty[$ .

$$\forall x > -2, f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - 1 \times (x+4)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-4}{(x+2)^2} = \frac{-2}{(x+2)^2} \text{ donc } f'(2) = \frac{-2}{(2+2)^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

2.  $T_2: y = f'(2)(x-2) + f(2)$  avec  $f'(2) = -\frac{1}{8}$  et  $f(2) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$   
 $T_2: y = -\frac{1}{8}(x-2) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}x + \frac{2}{8} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = -\frac{1}{8}x + \frac{7}{4}$

Conclusion :  $T_2: y = -\frac{1}{8}x + \frac{7}{4}$

## Exercice 4

- $B$  est dérivable sur  $[0;50]$  comme fonction polynôme.  
 $\forall x \in [0;50], B'(x) = -3x^2 + 20x + 2975$ .
- $B'(x) = -3x^2 + 20x + 2975$  est une fonction polynôme du second degré sous sa forme développée.  
 $\Delta = 20^2 - 4 \times (-3) \times 2975 = 36100 = 190^2 > 0$  donc  $B$  a deux racines réelles distinctes :  
 $x_1 = \frac{-20 - 190}{-6} = \frac{-210}{-6} = 35$  et  $x_2 = \frac{-20 + 190}{-6} = \frac{170}{-6} < 0$ .
- Le coefficient des  $x^2$  vaut  $a = -3 < 0$  d'où le tableau de variations suivants :

$x$	0	35	50		
$B'(x)$		+	0	-	
$B$	0	$\nearrow$	73500	$\searrow$	48750

- On déduit que  $B$  a un maximum pour  $x = 35$  qui vaut 73500.  
 L'entreprise fera un bénéfice maximal égal à 73500€ lorsqu'elle produira et vendra 35000 kg de matières premières.

## Exercice 5

- $\forall x \in [0;9], V(x) = (24 - 2x)(18 - 2x)x = (432 - 48x - 36x + 4x^2)x = (4x^2 - 84x + 432)x$   
 $\forall x \in [0;9], V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$

2. Étude de  $V$  sur  $\mathbb{R}$ 

$V$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme et  $\forall x \in \mathbb{R}, V'(x) = 12x^2 - 168x + 432$   
 $\Delta = (-168)^2 - 4 \times 12 \times 432 = 7488 = 24\sqrt{13} > 0$  donc  $V$  a deux racines distinctes dans  $\mathbb{R}$  :  
 $x_1 = \frac{168 - 24\sqrt{13}}{24} = 7 - \sqrt{13} \approx 3,4 \in [0;9]$  et  $x_2 = \frac{168 + 24\sqrt{13}}{24} = 7 + \sqrt{13} \approx 10,6 \notin [0;9]$ .

De plus, le coefficient des  $x^2$  est  $a = 12 > 0$  d'où le tableau de signes de  $V'(x)$  sur  $[0;9]$  et de variations de  $V$  sur  $[0;9]$  :

$x$	0	$7 - \sqrt{13}$	9	
$V'(x)$		+	0	-
$V$		$\nearrow$		$\searrow$

On déduit que  $V$  admet un maximum en  $x = 7 - \sqrt{13}$ .

**Exercice 6 - 10 points**

1. La fonction  $C$  est définie sur  $[0 ; 25]$ .
2.  $C(0)=40$  donc les coûts fixes s'élèvent à 40€.
3. La fonction  $C_M$  est définie sur  $]0 ; 25]$ .
4. Le coût de production, en euro, d'un objet si la production est de 10 unités vaut :

$$C_M(10) = \frac{C(10)}{10} = \frac{0,1 \times 10^2 + 30 \times 10 + 40}{10} = \frac{10 + 300 + 40}{10} = \frac{350}{10} = 35 \text{ €}$$

5. Soit  $0 < x \leq 25$ . On a :

$$C_M(x) = \frac{0,1x^2 + 30x + 40}{x} = \frac{0,1x^2}{x} + \frac{30x}{x} + \frac{40}{x} = 0,1x + 30 + \frac{40}{x}$$

6.  $\forall x \in ]0 ; 25], C'_M(x) = 0,1 + 0 + 40 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0,1 - \frac{40}{x^2} = \frac{0,1x^2 - 40}{x^2}$

Or,  $0,1(x-20)(x+20) = 0,1(x^2 + 20x - 20x - 400) = 0,1(x^2 - 400) = 0,1x^2 - 40$

donc  $C'_M(x) = \frac{0,1(x-20)(x+20)}{x^2}$

7.  $\forall x \in ]0 ; 25], x^2 > 0; 0,1 > 0, (x+20) > 0$  donc le signe de  $C'_M(x)$  dépend du signe de  $(x-20)$ .  
Or,  $x-20=0 \Leftrightarrow x=20$  et  $x-20 > 0 \Leftrightarrow x > 20$  d'où le tableau de signes de  $C'_M(x)$  sur  $]0 ; 25]$  :

$x$	0	20	25
$C'_M(x)$		-	0
			+

8. On déduit le tableau de variation de  $C_M$  sur  $[0;25]$  :

$x$	-0	20	25
$C'_M(x)$		-	0
			+
$C_M(x)$		↘	↗
		34	34,1

9. D'après le tableau de variations, on déduit que le unitaire est minimal si l'entreprise produit 20 répliques.
10. Il vaut alors  $C_M(20) = 0,1 \times 20 + 30 + \frac{40}{20} = 2 + 30 + 2 = 34 \text{ €}$ .