Correction

Exercice 1

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2-3x+8$.

1. Soit $h\in\mathbb{R}, h\neq 0$. On a :
$T(h)=\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\dfrac{[(-2(-2+h)^2-3(-2+h)+8)]-(-2\times(-2)^2-3\times(-2)+8)}{h}$
$T(h)=\dfrac{[-2(4-4h+h^2)+6-3h+8]-6}{h}=\dfrac{-8+8h-2h^2+6-3h+8-6}{h}=\dfrac{-2h^2+5h}{h}$
$T(h)=\dfrac{h(-2h+5)}{h}=-2h+5$ d'où $\lim\limits_{h\to 0} T(h)=\lim\limits_{h\to 0} -2h+5=5\in\mathbb{R}$
donc f est dérivable en $a=-2$ et $f'(-2)=5$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-4x-3$ donc
$f'(-2)=-4\times(-2)-3=8-3=5$. on retrouve le résultat du 1.

3. $T_a : y=f'(a)(x-a)+f(a)$
$T_{-2} : y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$
$T_{-2} : y=5(x+2)+6$
$T_{-2} : y=5x+10+6$
$T_{-2} : y=5x+16$

4. Soit $h\in\mathbb{R}, h\neq 0$. On a :
$T(h)=\dfrac{[(-2(a+h)^2-3(a+h)+8)]-(-2a^2-3a+8)}{h}=\dfrac{[-2(a^2+2ah+h^2)-3a-3h+8]+2a^2+3a+8}{h}$
$T(h)=\dfrac{-2a^2-4ah-2h^2-3a-3h+8+2a^2+3a-8}{h}=\dfrac{-2h^2-4ah-3h}{h}=\dfrac{h(-2h-4a-3)}{h}$
$T(h)=-2h-4a-3$ d'où $\lim\limits_{h\to 0} T(h)=\lim\limits_{h\to 0} -2h-4a-3=-4a-3\in\mathbb{R}$

5. Le coefficient directeur de $(d): y=-7x+11$ vaut $m=-7$.
C_f admet une tangente parallèle à (d) en $a\in\mathbb{R}$ si et seulement si $f'(a)=-7$.
$f'(a)=-7 \Leftrightarrow -4a-3=-7 \Leftrightarrow -4a=-4 \Leftrightarrow a=1$.

Conclusion : C_f a une seule tangente parallèle à (d) , au point d'abscisse $a=1$.

Exercice 2

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h)=\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}=\frac{\frac{-1}{3-(-2+h)}-\frac{-1}{3-(-2)}}{h}=\frac{\frac{-1}{5-h}-\frac{-1}{5}}{h}=\frac{\frac{-1}{5-h}+\frac{1}{5}}{h}=\frac{\frac{-5+5-h}{5(5-h)}}{h}$$

$T(h)=\frac{-h}{5(5-h)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{5(5-h)}$ d'où :

$\lim_{h\to 0} T(h)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{5(5-h)}=-\frac{1}{25}\in\mathbb{R}$ donc g est dérivable en -2 et $g'(-2)=-\frac{1}{25}$

2. $T_a : y=g'(a)(x-a)+g(a)$

$T_{-2} : y=-\frac{1}{25}(x+2)+(-\frac{1}{5})$

$T_{-2} : y=-\frac{1}{25}x-\frac{2}{25}-\frac{5}{25}$

$T_{-2} : y=-\frac{1}{25}x-\frac{7}{25}$

3. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h)=\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{\frac{-1}{3-(a+h)}-\frac{-1}{3-a}}{h}=\frac{\frac{-1}{3-a-h}-\frac{-1}{3-a}}{h}=\frac{\frac{-1}{3-a-h}+\frac{1}{3-a}}{h}$$

$$T(h)=\frac{\frac{-(3-a)+(3-a-h)}{(3-a-h)(3-a)}}{h}=\frac{\frac{-3+a+3-a-h}{(3-a-h)(3-a)}}{h}=\frac{-h}{(3-a-h)(3-a)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{(3-a-h)(3-a)}$$ d'où :

$\lim_{h\to 0} T(h)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(3-a-h)(3-a)}=-\frac{1}{(3-a)^2}\in\mathbb{R}$ donc g est dérivable en a et $g'(a)=-\frac{1}{(3-a)^2}$

4. $(d): y=-x+5$ a pour coefficient directeur $m=-1$.
Or, deux droites non parallèles à l'axe (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. On déduit que Cg a une tangente parallèle à (d) s'il existe un réel a tel que $g'(a)=-1$.

$g'(a)=-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{(3-a)^2}=-1 \Leftrightarrow -1=-(3-a)^2 \Leftrightarrow (3-a)^2=1 \Leftrightarrow (3-a)=1$ ou $(3-a)=-1$

$g'(a)=-1 \Leftrightarrow -a=1-3=-2$ ou $-a=-1-3=-4 \Leftrightarrow a=2$ ou $a=4$

Conclusion : Cg a deux tangentes parallèle à (d) , l'une au point d'abscisse $a=2$ et l'autre au point d'abscisse $a=4$.

Exercice 3

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \frac{\frac{2}{1-(-1+h)} - \frac{2}{1-(-1)}}{h} = \frac{\frac{2}{2-h}-1}{h} = \frac{\frac{2-(2-h)}{2-h}}{h} = \frac{\frac{h}{2-h}}{h} = \frac{h}{2-h} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{2-h}$$

$\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{2-h} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ donc g est dérivable en -1 et $g'(-1) = \frac{1}{2}$

2. $T_a : y = g'(a)(x-a)+g(a)$

$T_{-1} : y = \frac{1}{2}(x+1)+1$

$T_{-1} : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1$

$T_{-1} : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

3. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h) = \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{\frac{2}{1-(a+h)} - \frac{2}{1-a}}{h} = \frac{\frac{2}{1-a-h} - \frac{2}{1-a}}{h} = \frac{\frac{2(1-a)-2(1-a-h)}{(1-a-h)(1-a)}}{h}$$

$$T(h) = \frac{\frac{2-2a-2+2a+2h}{(1-a-h)(1-a)}}{h} = \frac{\frac{2h}{(1-a-h)(1-a)}}{h} = \frac{2h}{(1-a-h)(1-a)} \times \frac{1}{h} = \frac{2}{(1-a-h)(1-a)}$$

$\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2}{(1-a-h)(1-a)} = \frac{2}{(1-a)^2} \in \mathbb{R}$ donc g est dérivable en a et $g'(a) = \frac{2}{(1-a)^2}$

4. $(d) : y = -3x+12$ a pour coefficient directeur $m = -3$.
Or, deux droites non parallèles à l'axe (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. On déduit que Cg a une tangente parallèle à (d) s'il existe un réel a tel que $g'(a) = -3$.

$g'(a) = -3 \Leftrightarrow \frac{2}{(1-a)^2} = -3$: Impossible car $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 1, \frac{2}{(1-a)^2} > 0$

Conclusion : Il n'existe aucune tangente à Cg parallèles à (d) .

Exercice 4

1. Soit $h\in\mathbb{R}, h\neq 0$. On a :
   $T(h)=\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\dfrac{[(-4(-3+h)^2-(-3+h)+1)]-(-4\times(-3)^2-(-3)+1)}{h}$
   $T(h)=\dfrac{[-4(9-6h+h^2)+3-h+1]-(-32)}{h}=\dfrac{-36+24h-4h^2+3-h+1+32}{h}=\dfrac{-4h^2+23h}{h}$
   $T(h)=\dfrac{h(-4h+23)}{h}=-4h+23$
   d'où $\lim\limits_{h\to 0} T(h)=\lim\limits_{h\to 0} -4h+23=23\in\mathbb{R}$ donc f est dérivable en $a=-3$ et $f'(-3)=23$.

2. $T_a : y=f'(a)(x-a)+f(a)$
   $T_{-3} : y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$
   $T_{-3} : y=23(x+3)-32$
   $T_{-3} : y=23x+69-32$
   $T_{-3} : y=23x+37$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-8x-1 \text{ donc } f'(-3)=-8\times(-3)-1=24-1=23$

4. C_f a une tangente parallèle à $(d) : y=2x+8$ si et seulement si, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f'(a)=2$.
   $f'(a)=2 \Leftrightarrow -8a-1=2 \Leftrightarrow -8a=3 \Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{8}$
   Conclusion : C_f a une unique tangente parallèle à (d), au point d'absiccise $a=-\dfrac{3}{8}$.

Exercice 5

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h)=\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=\frac{\frac{3}{1-(-2+h)}-\frac{3}{1-(-2)}}{h}=\frac{\frac{3}{3-h}-1}{h}=\frac{\frac{3-(3-h)}{3-h}}{h}=\frac{\frac{h}{3-h}}{h}=\frac{h}{3-h}\times\frac{1}{h}=\frac{1}{3-h}$$

$\lim_{h \to 0} T(h)=\lim_{h \to 0}\frac{1}{3-h}=\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$ donc g est dérivable en -2 et $g'(-2)=\frac{1}{3}$

2. $T_a : y=g'(a)(x-a)+g(a)$

$T_{-2} : y=\frac{1}{3}(x+2)+1$

$T_{-1} : y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}+1$

$T_{-1} : y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

3. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$T(h)=\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{\frac{3}{1-(a+h)}-\frac{3}{1-a}}{h}=\frac{\frac{3}{1-a-h}-\frac{3}{1-a}}{h}=\frac{\frac{3(1-a)-3(1-a-h)}{(1-a-h)(1-a)}}{h}$$

$$T(h)=\frac{\frac{3-3a-3+3a+3h}{(1-a-h)(1-a)}}{h}=\frac{\frac{3h}{(1-a-h)(1-a)}}{h}=\frac{3h}{(1-a-h)(1-a)}\times\frac{1}{h}=\frac{3}{(1-a-h)(1-a)}$$

$\lim_{h \to 0} T(h)=\lim_{h \to 0}\frac{3}{(1-a-h)(1-a)}=\frac{3}{(1-a)^2}\in\mathbb{R}$ donc g est dérivable en a et $g'(a)=\frac{3}{(1-a)^2}$

4. $(d) : y=2x+8$ a pour coefficient directeur $m=2$.
Or, deux droites non parallèles à l'axe (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. On déduit que Cg a une tangente parallèle à (d) s'il existe un réel a tel que $g'(a)=2$.

$$g'(a)=2 \Leftrightarrow \frac{3}{(1-a)^2}=2 \Leftrightarrow (1-a)^2=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1-a=\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } (1-a)=-\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a=1-\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } a=1+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Conclusion : Cg a deux tangentes parallèles à (d) , l'une au point d'abscisse $a=1-\sqrt{\frac{3}{2}}$ et l'autre au point d'abscisse $a=1+\sqrt{\frac{3}{2}}$.