Chapitre 6 : Nombres complexes point de vue géométrique

I. Géométrie et nombres complexes

1. Plan orienté et repère orthonormé direct du plan complexe

Définitions :

- Un plan est dit orienté si un cercle du plan est orienté.
- Tous les cercles sont alors orientés de la même façon.
- Le repère est dit (orthonormé) direct lorsqu'il est orienté dans le sens trigonométrique c'est à dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Le plan est alors appelé plan complexe.
- L'axe $(O;\vec{u})$ est appelé l'axe des réels et l'axe $(O;\vec{v})$ est appelé axe des imaginaires purs.

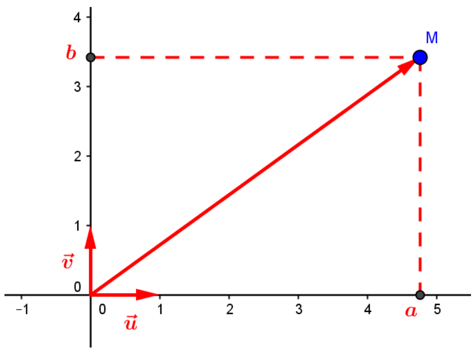
Remarque : Le repère est dit (orthonormé) indirect ou rétrograde lorsqu'il est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

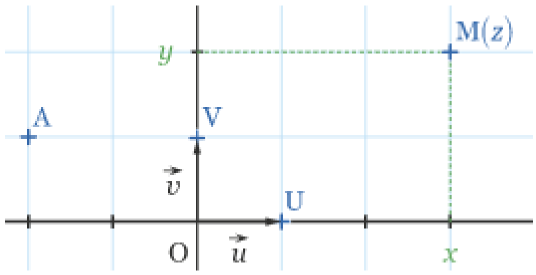
2. Affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Définitions :

- A tout nombre complexe $z=a+ib$ avec a et b réels, on associe dans le plan complexe un point unique M de coordonnées (a;b).
- Réciproquement, à tout point M(a;b) du plan complexe, on associe un nombre complexe unique
- $z=a+ib$ appelé affixe du point M ou affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$

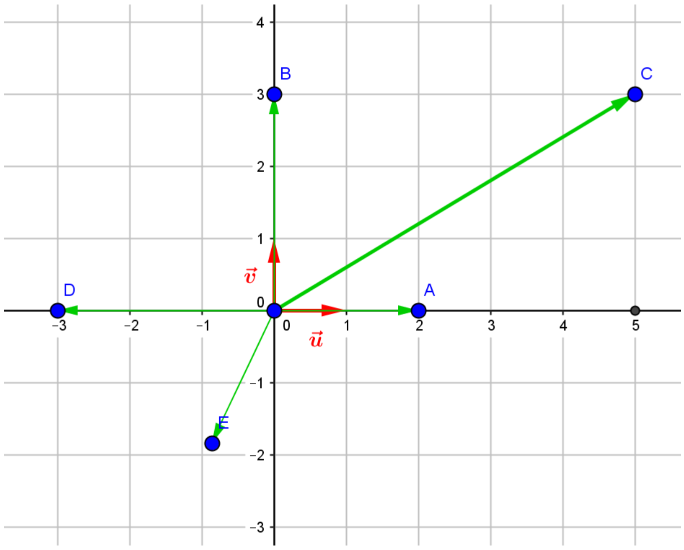


Exercice 1 : déterminer les affixes des points U, V et A dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ ci-contre.



Exercice 2 : Compléter les phrases ci-dessous :
A a pour affixe …… et pour coordonnées ………
B a pour affixe …… et pour coordonnées ………
C a pour affixe …… et pour coordonnées ………
D a pour affixe …… et pour coordonnées ………
E a pour affixe …… et pour coordonnées ………

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe……
Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ a pour affixe……
Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ a pour affixe……
Le vecteur $\overrightarrow{OD}$ a pour affixe……
Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ a pour affixe……



Propriété : Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs du plan complexe d'affixe respective z_1 et z_2 .

- Le vecteur $\vec{u}_1+\vec{u}_2$ a pour affixe z_1+z_2
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\lambda \vec{u}_1$ a pour affixe $z_{\lambda \vec{u}_1}=\lambda z_{\vec{u}_1}$

Preuve : Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ *deux vecteurs du plan complexe d'affixe respective* $z_1=a_1+ib_1$ *et* $z_2=a_2+ib_2$ *. Ainsi,* $\vec{u}_1(a_1;b_1)$ et $\vec{u}_2(a_2;b_2)$.

- $\vec{u}_1+\vec{u}_2$ *a pour coordonnées* $(a_1+a_2;b_1+b_2)$ *donc* $\vec{u}_1+\vec{u}_2$ *a pour affixe* $z_{\vec{u}_1+\vec{u}_2}=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)=(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)$
- *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *. Le vecteur* $\lambda \vec{u}_1$ *a pour coordonnées* $(\lambda a_1;\lambda b_1)$ *donc* $\lambda \vec{u}_1$ *a pour affixe* $z_{\lambda \vec{u}_1}=\lambda a_1+i\lambda b_1=\lambda(a_1+ib_1)=\lambda z_{\vec{u}_1}$ #

Exercice 3 : On considère les vecteurs $\vec{u}(2;-5)$ et $\vec{v}(-1;3)$.

(a) Déterminer l'affixe $z_{\vec{u}+\vec{v}}$.

(b) Déterminer l'affixe $z_{-3\vec{v}}$.

Exercice 4 : Soients $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs du plan complexe d'affixe respective $z_1=3i+5$ et $z_2=1-i$. Déterminer l'affixe du vecteur $5\vec{u}_1-\vec{u}_2$.

Propriété : Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B .

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
- le point I d'affixe z_I est le milieu de [AB] si et seulement si $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

Preuve : Par définition, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ *ont pour affixe respective* z_A et z_B .

- *D'après le relation de Chasles, on a* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
  On déduit que $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{OB}}-z_{\overrightarrow{OA}}=z_B-z_A$.
- *I est le milieu de [AB] si et seulement si* $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$.
  On déduit que $z_B-z_A=2(z_I-z_A)=2z_I-2z_A$ soit $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$. #

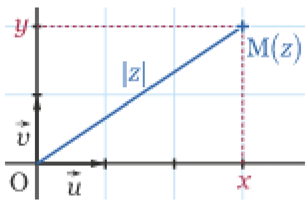
Exercice 5 : Soit A(-1+2i) et B(-3-4i) deux points du plan complexe.

1. Calculer $z_{\overrightarrow{AB}}$
2. Soit I le milieu de [AB]. Déterminer son affixe.

Exercice 6 : Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixe $z_A=5-2i$, $z_B=-1-i$ et $z_C=3+4i$. Déterminer l'affixe du point D tel que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

3. Module d'un nombre complexe

Définition : Soit M le point d'affixe z .
On appelle module de z et on note $|z|$ le réel positif ou nul égal à la distance c'est à dire $|z|=OM$.



Propriété : Soit $z\in\mathbb{C}$ alors $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.

Preuve : $|z|=0\Leftrightarrow OM=0\Leftrightarrow O$ et M sont confondus $\Leftrightarrow z=0$ #

Propriété : Pour tout nombre complexe $z=a+ib$ on a $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ et $|z|^2=z\times\bar{z}$.

Preuve : Soit M d'affixe z alors M a pour coordonnées $(a;b)$.
Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé, on a :
$|z|=OM=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.
De plus, $z\times\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2-ab\,i+i\,ab-i^2b^2=a^2+b^2=|z|^2$. #

Exercice 7 : déterminer le module de $z=6-8i$.

Exercice 8 :

a) Déterminer le module des nombres complexes $z_1=3i\,;z_2=3+4i$ et $z_3=-4$.
b) Dans le plan complexe, les points C et D ont pour affixe respective 1 + 4i et 2-i . Déterminer CD.
c) Soit A d'affixe z_A un point du cercle de centre O et de rayon 3. Calculer $z_A\overline{z_A}$.
d) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que :
(a) $|z-1-4i|=3$
(b) $|z-1-4i|=|z-2+i|$

Exercice 9 :
Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixe $z_A=-3+i\,;z_B=-1-2i$ et $z_C=4+3i$.

1. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
3. Déterminer l'affixe du centre I du parallélogramme ABCD.

Propriété : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et $n\in\mathbb{Z}^*$. On a :

- $|\bar{z}|=|z|$ et $|-z|=|z|$
- $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ si $z'\neq0$
- $|z^n|=|z|^n$ avec $z\neq0$ si $n<0$
- Inégalité triangulaire : $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

Remarque : l'inégalité triangulaire étant celle valable sur $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue.

Preuve des quatre premiers points en exercice

Dans le plan complexe, on considère deux nombres complexes $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, x' et y' quatre réels.

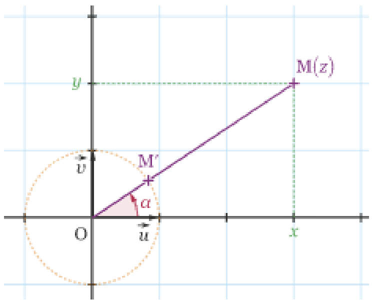
1. *Démontrer que* $|\bar{z}|=|z|$ *et* $|-z|=|z|$
2. *a) Démontrer que* $|z\times z'|=|z|\times|z'|$.
   b) Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*, |z^n|=|z|^n$.
3. *On suppose dans cette question que* $z'\neq 0$.
   a) Exprimer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$ *en fonction de* x, y, x' et y' .
   b) En déduire que $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ si $z'\neq 0$.
   c) En déduire alors que $\forall n\in\mathbb{Z}^*, |z^n|=|z|^n$. #

Exercice 10 :

Déterminer les modules des nombres complexes $z_1=(3-2i)(2+5i), z_2=(1-3i)^3$ et $z_3=\frac{1+i}{3-2i}$.

4. Argument d'un nombre complexe

Dans toute cette sous-partie, on suppose M distinct de O, c'est à dire $z\neq 0$. On considère M' le point de la demi-droite [OM) appartenant au cercle trigonométrique et on note α un réel associé au point M' du cercle trigonométrique comme sur la figure ci-contre.



Définition : Le réel α est appelé mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.
On note $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\alpha+2k\pi (k\in\mathbb{Z})$.

Définitions : Lorsque M est le point d'affixe z avec $z\neq 0$, un argument de z avec $z\neq 0$, noté $arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ c'est à dire :

$$\boldsymbol{(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\alpha+2k\pi (k\in\mathbb{Z})}$$

La mesure d'angle appartenant à $]-\pi;\pi]$ est appelée argument principal de z .

Propriété : z désigne un nombre complexe non nul.

1. $arg(z)=0+2k\pi (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow z$ est un réel strcitement positif
2. $arg(z)=\pi+2k\pi (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow z$ est un réel strcitement négatif
3. $arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur tel que $\text{Im}(z)>0$
4. $arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur tel que $\text{Im}(z)<0$

Remarques :

- *Si* $z=0$ *alors l'angle orienté* $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ *n'est pas défini. On ne peut donc pas parler d'argument de 0.*
- *Un argument de* z *n'est pas unique puisque l'angle orienté* $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ *admet une infinité de mesures, toutes égales à un multiple de* 2π *près.*

Remarque : ces propriétés permettent de démontrer le parallélisme et l'orthogonalité de droites.

Preuve :

1. $arg(z)=0+2k\pi(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{OM})=0+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$
   $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaires de même sens $\Leftrightarrow z$ est un réel strictemet positif
2. $arg(z)=\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{OM})=\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$
   $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaires de sens contraires $\Leftrightarrow z$ est un réel strictemet négatif
3. $arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$
   $\Leftrightarrow M$ appartient à la demi-droite $[O;\vec{v})\Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur tel que $\text{Im}(z)>0$
4. $arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{OM})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$
   $\Leftrightarrow M$ appartient à la demi-droite $[O;\vec{w})$ avec $\vec{w}(-i) \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur tel que $\text{Im}(z)<0$

#

Exercice 11 :

Déterminer les arguments des nombres complexes $z_1=-2; z_2=\frac{5}{2}i$.

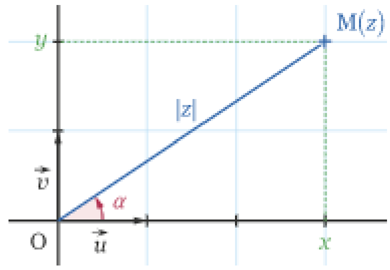
II. Forme trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère un nombre complexe non nul $z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.
On note $\alpha=arg(z)+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ et $r=|z|$.

1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

Propriété : Pour tout nombre complexe non nul $z=x+iy$ on a :

- $x=r\cos(\alpha)$ et $y=r\sin(\alpha)$
- De plus, $z=r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ avec $\alpha=arg(z)+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$



Remarque : $\cos(\alpha)=\frac{x}{r}$ et $\sin(\alpha)=\frac{y}{r}$

Preuve :
On a $\vec{u}.\overrightarrow{OM}=\|\vec{u}\|\times OM\times\cos(\vec{u};\overrightarrow{OM})=1\times|z|\times\cos(\alpha)$.
Or le repère est orthonormé donc $\vec{u}.\overrightarrow{OM}=1\times x+0\times y=x$ *. On déduit que* $x=|z|\cos(\alpha)$.

De même, $\vec{v}.\overrightarrow{OM}=\|\vec{v}\|\times OM\times\cos(\vec{v};\overrightarrow{OM})=1\times|z|\times\sin(\vec{u};\overrightarrow{OM})=|z|\times\sin(\alpha)$.
Or le repère est orthonormé donc $\vec{v}.\overrightarrow{OM}=0\times x+1\times y=y$ *. On déduit que* $y=|z|\sin(\alpha)$.

Conclusion : $z=x+iy=|z|\cos(\alpha)+i|z|\sin(\alpha)=|z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ #

Définition : On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul, l'écriture $z=r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ du nombre complexe z avec $r=|z|$ et $\alpha=arg(z)+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Exemple : $z=2(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$ est une forme trigonométrique de $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Exercice 12 :

1. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z_1=-\sqrt{5}+i\sqrt{5}$.
2. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe z_2 de module égal à 4 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$

Exercice 13 :

1. Déterminer la forme algébrique de $z=4(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3}))$.
2. Déterminer la forme trigonométrique de $z'=-5-5i\sqrt{3}$.

Propriété : Pour tous nombres complexes non nuls z et z' on a :

$$z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z|=|z'| \\ arg(z)=arg(z')+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Preuve :

- *On suppose que* z *et* z' *, alors* $|z|=|z'|$ et $arg(z)=arg(z')+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- *Réciproquement, on suppose que* $|z|=|z'|$ et $arg(z)=arg(z')+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
  alors, $z=|z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))=|z'|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))=z'$ #

Propriété : Pour tous réels a et b , on a :

- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

Preuve :

Soient a et b *deux réels et on définit dans le plan complexe les points* $M_1(\cos(a)+i\sin(a))$ *et* $M_2(\cos(b)+i\sin(b))$ *situé sur le cercle trigonométrique.*

1.

Ainsi $OM_1=OM_2=1$ *et* $(\vec{u};\overrightarrow{OM_1})=arg(z_{M_1})+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})=a+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ *et* $(\vec{u};\overrightarrow{OM_2})=arg(z_{M_2})+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})=b+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

On a $(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2})=(\overrightarrow{OM_1};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{OM_2})=-(\vec{u};\overrightarrow{OM_1})+(\vec{u};\overrightarrow{OM_2})=-a+b=b-a+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

On obtient donc $\cos(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2})=\cos(b-a)=\cos(-(a-b))=\cos(a-b)$.

D'une part, $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}=OM_1\times OM_2\times\cos(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2})=\cos(a-b)$.
D'autre part, le repère est orthonormé, donc $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ *d'où* $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

Par ailleurs, $\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)$.
Or, $\cos(-b)=\cos(b)$ et $\sin(-b)=-\sin(b)$ *donc* $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

2. *Pour tout réel* x , $\cos(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ et $\sin(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$

d'où pour tous réels a et b , $\sin(a+b)=\cos(\frac{\pi}{2}-(a+b))=\cos((\frac{\pi}{2}-a)-b)$

$\sin(a+b)=\cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos(b)+\sin(\frac{\pi}{2}-a)\sin(b)$

$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

$\sin(a-b)=\sin(a+(-b))=\sin(a)\cos(-b)+\sin(-b)\cos(a)$

Or, $\cos(-b)=\cos(b)$ et $\sin(-b)=-\sin(b)$ *donc*

$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$. #

Propriété : Pour tout réels a , on a :

- $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$
- $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

Preuve : ce sont des cas particuliers de la propriété précédente avec $b=a$ *.* #

Propriété : z et z' désignent deux nombres complexes non nuls et n désigne un entier naturel.

- $arg(\bar{z})=-arg(z)+2k\pi$ avec $(k\in\mathbb{Z})$
- $arg(-z)=arg(z)+\pi+2k\pi$ avec $(k\in\mathbb{Z})$
- $arg(z\times z')=arg(z)+arg(z')+2k\pi$ avec $(k\in\mathbb{Z})$
- $arg(z^n)=n\,arg(z)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$
- $arg(\frac{z}{z}')=arg(z)-arg(z')+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 14 :

Soit $z=\sqrt{3}+i$ et $z'=1+\sqrt{3}i$ deux nombres complexes.

1. Déterminer $|zz'|$ puis $arg(zz')$.
2. Déterminer $\left|\frac{z}{z'}\right|$ puis $arg\left(\frac{z}{z'}\right)$.
3. Déterminer $|z^6|$ puis $arg(z^6)$.
4. Déterminer $|z'|^3$ puis $arg(z'^3)$.

Exercice 15 :

1. Soit $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la forme algébrique de z^{2016} .
2. (a) Déterminer la forme algébrique puis trigonométrique de $Z=\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$.

   (b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

III. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Notations exponentielles

Définition : Pour tout réel α, on définit l'exponentielle imaginaire (ou exponentielle complexe) de α par $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

A savoir :

- $e^{io}=1$ et $e^{2i\pi}=1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$
- $e^{i\pi}=-1$
- $|e^{i\alpha}|=1$ et $arg(e^{i\alpha})=\alpha+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Propriété : Soit α et α' deux réels.

$e^{i\alpha}\times e^{i\alpha'}=e^{i(\alpha+\alpha')}$	$\dfrac{1}{e^{i\alpha}}=e^{-i\alpha}=\overline{e^{i\alpha}}$	$\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}}=e^{i(\alpha-\alpha')}$	$(e^{i\alpha})^n=e^{in\alpha},n\in\mathbb{N}$

Preuve :

- *Soit* α et α' *deux réels. On a :*

$$e^{i\alpha}\times e^{i\alpha'}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$$
$$e^{i\alpha}\times e^{i\alpha'}=(\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha\sin\alpha')+i(\cos\alpha\sin\alpha'+\sin\alpha\cos\alpha')$$
$$e^{i\alpha}\times e^{i\alpha'}=(\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha\sin\alpha')+i(\sin\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha'\cos\alpha)$$
$$e^{i\alpha}\times e^{i\alpha'}=\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha')=e^{i(\alpha+\alpha')}$$

- *Pour* $\alpha'=-\alpha$ *, on obtient:*

$$e^{i\alpha}\times e^{-i\alpha}=e^{i(\alpha-\alpha)}=e^{i\times 0}=1 \text{ donc } e^{-i\alpha}=\frac{1}{e^{i\alpha}}.$$

Or $e^{-i\alpha}=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)=\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)=\overline{e^{i\alpha}}$ *d'où le résultat.*

- *Soit* α et α' *deux réels. On a :*

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}}=e^{i\alpha}\times\frac{1}{e^{i\alpha'}}=e^{i\alpha}\times e^{-i\alpha'}=e^{i(\alpha-\alpha')}$$

- *Soit* $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$ *. La propriété* $(e^{i\alpha})^n=e^{in\alpha}$ *s'obtient par récurrence sur* n *.* #

Définition : Tout nombre complexe $z\neq 0$ s'écrit sous une des formes exponentielles $z=|z|e^{i\alpha}$ avec $\alpha=arg(z)+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Propriété : Étant donnés deux nombres complexes non nuls tels que $z=|z|z^{i\alpha}$ et $z'=|z'|e^{i\alpha'}$ alors :

- $z\times z'=|z|\times|z|'\times e^{i(\alpha+\alpha')}$
- $\forall n\in\mathbb{N}, z^n=|z|^n\times e^{in\alpha}$
- $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{|z|}{|z'|}e^{i(\alpha-\alpha')}$

Preuves : découlent immédiatement de la définition et des propriétés de l'exponentielle imaginaire. #

Exercice 16 : déterminer une forme exponentielle de $z=(-1-i)(3+3i\sqrt{3})$

2. Formules d'Euler et de Moivre

Formule d'Euler : Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve : évidente à partir du 1/ qui résulte de la définition de $e^{i\theta}$ et de la parité des fonctions cosinus et sinus. #

Formule de Moivre : Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

Preuve : s'établit par récurrence sur n #

3. Applications

Propriétés : Soit θ et θ' deux réels.

1. $\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$
2. $\cos(\theta-\theta')=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta-\theta')=\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta'$
3. $\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ et $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$

Preuve :
Les formules précédentes permettent de retrouver les formules d'addition et de duplication.

$$e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}\Leftrightarrow\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')=(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos\theta'+i\sin\theta')$$

$$e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}\Leftrightarrow\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')$$

d'où par identification :

1. $\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'$ *et* $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$

On déduit alors :

2. $\cos(\theta-\theta')=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'$ *et* $\sin(\theta-\theta')=\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta'$
3. $\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ *et* $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$ #

Exercice 17 :
On considère les points A, B et C d'affixes $z_A=3+i$, $z_B=2-i$ et $z_C=1+2i$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 18 :

1. Montrer que z^{57} est réel avec $z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.
2. Linéarisez $\cos^3\theta$.

Exercice 19 :
A, B et C sont trois points du plan complexe d'affixes $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_B=4+2i$ et $z_C=-5-i$.
Montrer que A, B et C sont alignés.

IV. Applications géométriques

1. Démontrer avec des nombres complexes

Propriété : Soient A et B deux points d'affixe respective z_A et z_B dans le plan complexe.
La distance AB est égale à $AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|$

Preuve :
Dans un repère orthonormé,
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_b-y_A)^2}=|(x_B-x_A)+i(y_b-y_A)|=|(x_B+iy_b)-(x_A+iy_A)|=|z_B-z_A|$$ #

Propriétés : Soient A et B deux points d'affixe respective z_A et z_B dans le plan complexe.

1. L'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z-z_A|=|z-z_B|$ est la médiatrice de [AB] .

2. Si $r\in\mathbb{R}, r>0$ alors l'ensemble (E') des points M d'affixe z tels que $|z-z_A|=r$ est le cercle de centre A et de rayon r .

Preuve :

$M(z)\in(E)\Leftrightarrow|z-z_A|=|z-z_B|\Leftrightarrow AM=BM\Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de [AB]

$M(z)\in(E')\Leftrightarrow|z-z_A|=r\Leftrightarrow AM=r\Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre A et de rayon r #

Propriétés : Soient A,B et C trois points deux à deux distincts d'affixe respective z_A, z_B et z_C .

1. $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=arg(z_B-z_A)+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

2. $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{arg(z_C-z_A)}{arg(z_B-z_A)}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Preuve :

1. *On sait que* $\overrightarrow{AB}$ *a pour affixe* z_B-z_A *. On considère le point M d'affixe* z_B-z_A *, alors* $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ *d'où* $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=(\vec{u};\overrightarrow{OM})+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
   On a donc $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=arg(z_B-z_A)+2k'\pi\,(k'\in\mathbb{Z})$.
   On obtient bien $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=(\vec{u};\overrightarrow{OM})+2k\pi=arg(z_B-z_A)+2k''\pi\,(k''\in\mathbb{Z})$

2. *D'après la relation de Chasles sur les angles orientés, on a : :*

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AB};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{AC})+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$
$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-(\vec{u};\overrightarrow{AB})+(\vec{u};\overrightarrow{AC})+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$
$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\vec{u};\overrightarrow{AC})-(\vec{u};\overrightarrow{AB})+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$
$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=arg(z_C-z_A)-arg(z_B-z_A)+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$
$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

#

Exercice 20 : Soient A,B et C trois points d'affixe respective $a=-1-i, b=3$ et $c=-2+3i$.
Déterminer la nature du triangle ABC.

2. Racines n-ièmes de l'unité

Définition : On appelle cercle unité et on note U , l'ensemble des nombres complexes de module 1.
On a donc $U=\{ z\in\mathbb{C}, |z|=1 \}$.

Propriété : On considère deux nombres complexes z et z' dans U . On a $zz'\in U$ et $\frac{z}{z'}\in U$.

Preuve immédiate par passage aux modules. #

Définition : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle racines n-ièmes de l'unité ls solutions de l'équation complexe $z^n=1$.

Propriétés :

1. On a $U_n=\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k\in\mathbb{N}, 0\leqslant k\leqslant n-1\}$ est composé d'exactement n éléments.
2. Si $n\geqslant 3$ alors les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.

Exemples : $U_1=\{1\}; U_2=\{-1;1\}; U_3=\{1;j;j^2\}$ avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $U_4=\{-1;1;-i;i\}$