Exercice 1

Pour chacune des suites définies ci-dessous, reconnaître celles qui sont géométriques et indiquer pour celles qui le sont le premier terme, la raison et le sens de variation.

$u_n=3n^2+1$ $\qquad u_n=3\times 7^n$ $\qquad u_n=\dfrac{3^{n+1}}{5^n}$ $\qquad u_n=2^n+3^n$

Correction

1. $u_0=1$, $u_1=4$ et $u_2=13$ donc $\dfrac{u_1}{u_0}=4$ et $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{13}{4}\neq 4$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. $u_0=3$, $u_1=21$ et $u_2=147$ donc $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{21}{3}=7$ et $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{147}{21}=7$

   donc (u_n) semble géométrique.

   $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=3\times 7^{n+1}=3\times 7^n\times 7=u_n\times 7$ donc (u_n) est bien géométrique de raison $q=7$ et de 1er terme $u_0=3$.

   De plus $u_0=3>0$ et $q=7>1$ donc la suite (u_n) est croissante.

3. $u_0=3$, $u_1=\dfrac{9}{5}$ et $u_2=\dfrac{27}{25}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{\frac{9}{5}}{3}=\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{\frac{27}{25}}{\frac{9}{5}}=\dfrac{27}{25}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{3}{5}$

   donc (u_n) semble géométrique.

   $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{3^{n+2}}{5^{n+1}}=\dfrac{3^{n+1}\times 3}{5^n\times 5}=\dfrac{3^{n+1}}{5^n}\times\dfrac{3}{5}=u_n\times\dfrac{3}{5}$ donc (u_n) est bien géométrique de raison $q=\dfrac{3}{5}$ et de 1er terme $u_0=3$.

   De plus $u_0=3>0$ et $0<q<1$ donc la suite (u_n) est décroissante.

4. $u_0=2$, $u_1=5$ et $u_2=13$ donc $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{13}{5}\neq\dfrac{5}{2}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 2

Parmi les suites proposées ci-dessous, reconnaître les suites géométriques et indiquer pour celles qui le sont la raison et le sens de variation.

$\begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=5v_n \end{cases}$ $\begin{cases} v_0=-1 \\ v_{n+1}=nv_n \end{cases}$ $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\dfrac{v_n}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=4^{v_n} \end{cases}$

Correction

1. $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=v_n\times 5$ donc la suite est géométrique de raison $q=5$.
   De plus $v_0=3>0$ et $q=5>1$ donc (v_n) est croissante.

2. $v_0=-1, v_1=0$ et $v_2=0$ donc (v_n) est géométrique de raison $q=0$.
   La suite est donc constante à partir du rang 1.

3. $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=v_n\times\dfrac{1}{5}$ donc (v_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{5}$.

   De plus $v_0=1>0$ et $0<q<1$ donc (v_n) est décroissante.

4. $v_0=1, v_1=4$ et $v_2=256$ donc $\dfrac{v_1}{v_o}=4$ et $\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{256}{4}=64\neq 4$
   donc (v_n) n'est pas géométrique.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de 1er terme $u_0=4$.

Soit (v_n) la suite géométrique de raison -2 et de 1er terme $v_0=9$.

Soit (t_n) la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, t_n=\frac{5v_n}{7u_n}$.

Démontrer que (t_n) est géométrique et préciser son sens de variation.

Correction

(u_n) est géométrique de raison 3 et de 1er terme $u_0=4$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=3\times u_n$.

(v_n) est géométrique de raison -2 et de 1er terme $v_0=9$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=-2\times v_n$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}, t_{n+1}=\frac{5v_{n+1}}{7u_{n+1}}=\frac{5\times(-2v_n)}{7\times 3u_n}=\frac{-2\times 5v_n}{3\times 7u_n}=\frac{-2}{3}\times\frac{5v_n}{7u_n}=\frac{-2}{3}\times t_n$

donc (t_n) est bien géométrique de raison $q=\frac{-2}{3}$ et de 1er terme $t_0=\frac{5v_0}{7u_0}=\frac{45}{28}$.

De plus $q<0$ donc la suite (t_n) n'est pas monotone.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=2u_n+3$ et de 1er terme $u_0=4$.

1. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n=u_n+3$.
   Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme.
3. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis en déduire celle de u_n .
4. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n) puis en déduire celui de la suite (u_n) .

Correction

1. $u_0=4, u_1=11$ et $u_2=25$ donc $u_1-u_0=7$ et $u_2-u_1=25-11=14\neq 7$
   donc (u_n) n'est pas arithmétique.

   $\frac{u_1}{u_0}=\frac{11}{4}$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{25}{11}\neq\frac{11}{4}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1}=u_{n+1}+3=2u_n+3+3=2u_n+6=2(u_n+3)=2v_n$
   donc (v_n) est géométrique de raison $q=2$ et de 1er terme $v_0=u_0+3=4+3=7$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n=v_0\times q^n=7\times 2^n$.
   (v_n) est géométrique telle que $v_0=7>0$ et $q=2>1$ donc (v_n) est croissante.

   $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=v_{n+1}-3-(v_n-3)=v_{n+1}-3-v_n+3=v_{n+1}-v_n$

   (v_n) est croissante donc $v_{n+1}-v_n\geqslant 0$ donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

Exercice 5

(v_n) est une suite géométrique de 1er terme $v_0=-2$ et de raison $q=\frac{1}{3}$.

Déterminer v_1 et v_2 puis exprimer v_n en fonction de n puis calculer v_{14} .

Correction

- $v_1=v_0\times q=-2\times\frac{1}{3}=\frac{-2}{3}$ et $v_2=v_1\times q=\frac{-2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{-2}{9}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n=v_0\times q^n=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-2}{3^n}$ donc $v_{14}=\frac{-2}{3^{14}}=\frac{-2}{4782969}$

Exercice 6

(v_n) est une suite géométrique de 1^er^ terme $v_1=-2$ et de raison $q=-3$.

Déterminer v_n en fonction de *n* et calculer le 9ème terme de la suite.

Correction

- $\forall\, n\in\mathbb{N},\, v_n=v_1\times q^{n-1}=-2\times(-3)^{n-1}$
- Le 9ème terme de la suite est $v_9=-2\times(-3)^8=-13122$

Exercice 7

1. Programmer un programme en langage Python permettant l'affichage de la liste des *N* premiers termes d'une suite géométrique à partir de la saisie du premier terme u_0 , de la raison *q* et de *N*.
2. Qu'affiche le programme si l'on saisit $u_0=5\,,q=4$ et $N=10$.

Correction

1. En langage Python, on écrit :

```
u=float(input("u0=?"))
q=float(input("raison q=?"))
N=int(input("N=?"))
L=[u]
for i in range(1,N):
    u=u*q
    L=L+[u]
print(L)
```

2. Pour $u_0=5\,,q=4$ et $N=10$, on obtient :

```
u0=?5
raison q=?4
N=?10
[5.0, 20.0, 80.0, 320.0, 1280.0, 5120.0, 20480.0, 81920.0, 327680.0, 1310720.0]
```