Exercice 1

La croissance du fœtus est surveillée par échographie. Quand il est trop grand pour être visualisé complètement, on mesure le diamètre bipariétal (l'écartement entre les deux os qui se trouvent de chaque côté de la face). On admet qu'à partir de la 11ème semaine, ce diamètre bipariétal augmente chaque semaine de 2 mm et qu'il vaut 24 mm à la fin de la 11ème semaine. On note u_n sa valeur, exprimée en mm, à la fin de $(n+11)-ième$ semaine de grossesse.

1. Donner u_0 puis calculer u_1 et u_2 .
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.
4. Au bout de combien de semaines, le diamètre bipariétal dépassera-t-il 5 cm ?

Correction

1. $u_0=24$, $u_1=24+2=26$ et $u_2=26+2=28$.
2. $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+2$ donc (u_n) est arithmétique de raison $r=2$ et de 1er terme $u_0=24$.
3. $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0+nr=24+2n$.
4. On cherche le plus petit entier *n* tel que $u_n>50$. Or,
   $u_n>50 \Leftrightarrow 24+2n>50 \Leftrightarrow 2n>26 \Leftrightarrow n>13$
   On prend donc $n=14$ et donc le diamètre bipariétal dépassera 5 cm lors de la 25ème semaine de grossesse.

Exercice 2

La production d'une entreprise peut-être modélisée par une suite arithmétique (u_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne le nombre d'appareils produits l'année *n*. La première année, la production est de 7500 appareils, on a donc $u_1=7500$. La sixième année, la production est de 12000 appareils, on a donc $u_6=12000$.

1. Exprimer u_n en fonction de *n*.
2. Au bout de combien d'années, la production annuelle aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale ?

Correction

1. (u_n) est arithmétique donc, $\forall \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, u_n=u_1+(n-1)r$. En particulier :
   $u_6=u_1+(6-1)r$ donc $12000=7500+5r$ donc $r=\dfrac{12000-7500}{5}=900$ d'où
   $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, u_n=u_1+(n-1)r=7500+(n-1)\times 900=7500+900n-900=900n+6600$.

2. On cherche le plus petit entier *n* tel que $u_n>22500$.
   $u_n>22500 \Leftrightarrow 900n+6600>22500 \Leftrightarrow n>\dfrac{22500-66}{900} \Leftrightarrow n>\dfrac{15900}{900}$
   Or $\dfrac{15900}{900}\approx 17{,}6$. On prend donc $n=18$ et par conséquent la production annuelle aura dépassé le triple de la production initiale au bout de 18 ans.

Exercice 3

Au 31 décembre 2019, Sophia a reçu 75€ d'étrennes, puis chaque année celles-ci augmentent de 8€. Pour tout entier naturel *n*, on note a_n le montant des étrennes reçues le 31 décembre de l'année 2019 + *n*.

1. Donner les valeurs de a_1 et a_2 des étrennes en décembre 2020 et 2021.
2. Quelle est la nature la suite (a_n) ?
3. Exprimer a_n en fonction de n .
4. Quelle somme totale aura-t-elle reçue le 31 décembre 2034 ?
5. Sophia a placé sur un compte toutes les étrennes qu'elle a reçues jusqu'au 31 décembre 2034. A partir de l'année suivante, elle ne reçoit plus d'étrennes et reverse 270€ de ce compte à son frère chaque 31 décembre. Pour tout entier naturel *n*, on note b_n le montant qu'il lui reste sur son compte de 31 décembre de l'année 2034 + *n* après avoir versé les étrennes à son frère. Déterminer b_0 .
6. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n puis déterminer l'expression de b_n en fonction de *n*.
7. En quelle année, Sophia aura-t-elle reversé la moitié de ses étrennes à son frère ?

Correction

1. $a_1=75+8=83$ et $a_2=83+8=91$.
2. $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=a_n+8$ donc (a_n) est arithmétique de raison $r=8$ et de 1er terme $a_0=75$.
3. $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=a_0+n\,r=75+8n$. $2034-2019=15$ et $a_{15}=75+8\times15=195$,

   On cherche donc $\sum_{k=0}^{15} a_k$. C'est la somme des 16 premiers termes d'une suite arithmétique dont le premier est $a_0=75$ et le dernier est $a_{15}=195$.

   On a donc $\sum_{k=0}^{15} a_k=16\times\frac{a_0+a_{15}}{2}=16\times\frac{75+195}{2}=\frac{16\times270}{2}=2160$

   Le 31 décembre 2014 , elle aura reçu au total 2160€ d'étrennes.
4. $b_0=\sum_{k=0}^{15} a_k=2160$
5. $\forall n\in\mathbb{N}, b_{n+1}=b_n-270=b_n+(-270)$ donc (b_n) est arithmétique de raison $r=-270$ et de 1er terme $b_0=2160$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}, b_n=b_0+n\,r=2160-270n$.
6. On cherche le plus petit entier *n* tel que $b_n\leq1080$. Or,

   $b_n\leq1080\Leftrightarrow2160-270n\leqslant1080\Leftrightarrow-270n\leqslant-1080\Leftrightarrow n\geqslant\frac{1080}{270}$

   Or $\frac{1080}{270}=4$. On prend donc $n=4$ et par conséquent Sophia aura reversé la moitié de ses étrennes à son frère en 2038