Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

$S=1+2+3+...+15$ $S=1+2+3+....+99$ $S=8+9+10+....+23$ $S=18+19+20+..+50$

Correction

1. $S=1+2+3+...+15=\frac{15\times(15+1)}{2}=\frac{15\times16}{2}=120$
2. $S=1+2+3+....+99=\frac{99\times(99+1)}{2}=\frac{99\times100}{2}=4950$
3. $S=8+9+10+....+23=16\times\frac{23+8}{2}=16\times\frac{31}{2}=\frac{16}{2}\times31=8\times31=248$
4. $S=18+19+20+....+50=33\times\frac{50+18}{2}=33\times34=1122$

Exercice 2

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0=4$.
   Calculer $S=u_0+u_1+....+u_{30}$
2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_1=-1$.
   Calculer la somme $S=v_1+v_2+....+v_{20}$

Correction

1. $S=u_0+u_1+....+u_{30}$ est la somme des 31 premiers termes d'une suite arithmétique de 1er terme $u_0=4$ et de dernier terme $u_{30}=u_0+30r=4+30\times(-3)=4-90=-86$ donc
   $S=31\times\frac{u_0+u_{30}}{2}=31\times\frac{4+(-86)}{2}=\frac{31\times(-82)}{2}=-1271$

2. $S=v_1+v_2+....+v_{20}$ est la somme des 20 premiers termes d'une suite arithmétique de 1[er] terme $v_1=-1$ et de dernier terme $v_{20}=v_1+(20-1)\times r=-1+19\times2=37$ donc
   $S=20\times\frac{v_1+v_{20}}{2}=20\times\frac{-1+37}{2}=\frac{20\times36}{2}=360$

Exercice 3

Calculer la somme des 25 premiers entiers naturels pairs non nuls.

Correction

Les 25 premiers entiers naturels pairs non nuls forment une suite arithmétique (u_n) de raison 2 et de 1er terme $u_0=2$. Le 25ième terme est $u_{24}=u_0+24r=2+24\times2=50$.

On a donc $S=25\times\frac{u_0+u_{24}}{2}=25\times\frac{2+50}{2}=\frac{25\times52}{2}=650$.

Exercice 4

1. Démontrer la formule $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
2. Combien y-aurait-il de boules de billard si la figure comportait 10 rangées ?

Correction

1. $S_n=1+\ 2\ +\ 3\ +....+n-2+n-1+n$
   $S_n=n+n-1+n-2+....+\ 3\ +\ 2\ +1$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$2S_n=(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)+(n+1)+(n+1)$$

donc $2S_n=n(n+1)$ donc $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ donc $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

2. Il faut calculer $\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\times11}{2}=55$. Sur les 10 rangés, il y aura 55 boules.

Exercice 5

Déterminer 9 nombres impairs consécutifs sachant que leur somme est égale à 153.

Correction

Un nombre impair se note $2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$. On cherche *k* tel que $\sum_{i=k}^{k+8}(2i+1)=153$.

Ces nombres impairs forment une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $2k+1$.
Il y a 9 termes dans cette somme et le dernier terme est $2(k+8)+1=2k+16+1=2k+17$.

On déduit que $\sum_{i=k}^{k+8}(2i+1)=9\times\frac{2k+1+2k+17}{2}=9\times\frac{4k+18}{2}=9(2k+9)=18k+81$.

Or, $\sum_{i=k}^{k+8}(2i+1)=153\Leftrightarrow 18k+81=153\Leftrightarrow 18k=72\Leftrightarrow k=\frac{72}{18}=4$.

Conclusion : les 9 nombre impairs consécutifs sont: 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 et 25.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0=13$ et de raison $r=-5$.

1. Calculer u_1 et u_2
2. Exprimer u_n en fonction de *n* puis calculer le quinzième terme de cette suite.
3. Étudier les variations de la suite (u_n) .
4. Calculer la somme $S=\sum_{k=0}^{23}u_k$

Correction

1. $u_1=u_0+(-5)=13-5=8$ et $u_2=u_1+(-5)=8-5=3$.
2. $\forall\, n\in\mathbb{N}, u_n=u_0+nr=13+(-5)\times n=13-5n$.
   Le 15ème terme de cette suite est $u_{14}=13-5\times 14=-57$.
3. La suite est arithmétique de raison $r=-5<0$ donc la suite est décroissante.
4. $S=\sum_{k=0}^{23}u_k$ est la somme des 24 premiers d'une suite arithmétique de 1er terme $u_0=13$
   et de dernier $u_{23}=u_0+23r=13+23\times(-5)=13-115=-102$. On a donc :
   $S=\sum_{k=0}^{23}u_k=24\times\frac{u_0+u_{23}}{2}=24\times\frac{13+(-102)}{2}=\frac{24\times(-89)}{2}=-1068$

Exercice 7

Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $v_1=5$ et de raison $r=3$.

1. Exprimer v_n en fonction de *n* puis calculer le dixième terme de cette suite.
2. Étudier les variations de la suite (v_n) .
3. Calculer la somme $S=\sum_{k=1}^{30} v_k$.

Correction

1. $\forall\, n\in\mathbb{N}, v_n=v_1+(n-1)r=5+(n-1)\times 3=5+3n-3=3n+2$.
   Le dixième terme de cette suite est $v_{10}=3\times 10+2=32$.

2. La suite est arithmétique de raison $r=3>0$ donc la suite est croissante.

3. $S=\sum_{k=1}^{30} v_k$ est la somme des 30 premiers termes d'une suite arithmétique, de 1er terme $v_1=5$ et de dernier $v_{30}=v_1+(30-1)r=5+29\times 3=92$. On a donc :
   $S=\sum_{k=1}^{30} v_k=30\times\frac{v_1+v_{30}}{2}=30\times\frac{5+92}{2}=\frac{30\times 97}{2}=1455$