Exercice 1

Pour chacune des suites définies ci-dessous, reconnaître celles qui sont arithmétiques et indiquer pour celles qui le sont le premier terme, la raison et le sens de variation.

$u_n=2n^2-n+1$ $u_n=2n-3$ $u_n=\frac{-n+1}{3}$ $u_n=3^n+1$

Correction

1. $u_n=2n^2-n+1$: $u_0=1$, $u_1=2-1+1=2$ et $u_2=8-2+1=7$
$u_1-u_0=1$ et $u_2-u_1=5\neq 1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2. $u_n=2n-3$: $u_0=-3$, $u_1=-1$ et $u_2=1$
$u_1-u_0=2$ et $u_2-u_1=2$ donc la suite (u_n) semble arithmétique.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=2(n+1)-3=2n+2-3=2n-1=2n-3+2=u_n+2$
donc la suite est arithmétique de 1er terme $u_0=-3$ et de raison $r=2$.
De plus $r=2>0$ donc la suite est croissante.

3. $u_n=\frac{-n+1}{3}$: $u_0=\frac{1}{3}$, $u_1=0$ et $u_2=\frac{-1}{3}$
$u_1-u_0=\frac{1}{3}$ et $u_2-u_1=-\frac{1}{3}$ donc la suite (u_n) semble arithmétique.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{-(n+1)+1}{3}=\frac{-n}{3}=\frac{-n+1-1}{3}=\frac{-n+1}{3}-\frac{1}{3}=u_n-\frac{1}{3}$
donc la suite est arithmétique de 1er terme $u_0=\frac{1}{3}$ et de raison $r=-\frac{1}{3}$.
De plus $r=\frac{-1}{3}<0$ donc la suite est décroissante.

4. $u_n=3^n+1$: $u_0=2$, $u_1=4$, $u_2=10$.
$u_1-u_0=2$ et $u_2-u_1=6\neq 2$ et donc la suite n'est pas arithmétique.

Exercice 2

Reconnaître les suites arithmétiques parmi celle proposées et indiquer pour celles qui le sont la raison et le sens de variation.

$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=u_n+n^2 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=u_n+n \end{cases}$ $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=u_n-5 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0=7 \\ u_{n+1}=2u_n+1 \end{cases}$

Correction

1. $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=u_n+n^2 \end{cases}$. $u_0=3$, $u_1=3$ et $u_2=4$

   $u_1-u_0=0$ et $u_2-u_1=1\neq 0$ donc la suite n'est pas arithmétique.

2. $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=u_n+n \end{cases}$. $u_0=2$, $u_1=2$ et $u_2=3$

   $u_1-u_0=0$ et $u_2-u_1=1\neq 0$ donc la suite n'est pas arithmétique.

3. $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=u_n-5 \end{cases}$. $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=-5$

   donc la suite est arithmétique de 1er terme $u_0=-1$ et de raison $r=-5$.

   De plus $r=-5<0$ donc la suite est décroissante.

4. $\begin{cases} u_0=7 \\ u_{n+1}=2u_n+1 \end{cases}$. $u_0=7$, $u_1=15$ et $u_2=31$

   $u_1-u_0=8$ et $u_2-u_1=16\neq 8$ donc la suite n'est pas arithmétique.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_0=4$ et (v_n) la suite arithmétique de raison -2 telle que $v_0=9$. Démontrer que la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n=u_n-5v_n$ est arithmétique et préciser son sens de variation.

Correction

(u_n) est arithmétique de raison 3 et de 1er terme $u_0=4$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+3$.

(v_n) est arithmétique de raison -2 et de 1er terme $v_0=9$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=v_n-2$.

ainsi $\forall n\in\mathbb{N}, t_{n+1}=u_{n+1}-5v_{n+1}=u_n+3-5(v_n-2)=u_n+3-5v_n+10=u_n-5v_n+13=t_n+13$

donc (t_n) est arithmétique de raison $r=13$ et de premier terme $t_0=u_0-5v_0=4-5\times 9=-41$.

De plus $r=13>0$ donc la suite (t_n) est croissante.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=6$ et la relation $u_{n+1}=\frac{u_n}{2u_n+1}$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\frac{1}{u_n}$. Démontrer que la suite est arithmétique.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n) .

Correction

1. $u_0=6$, $u_1=\frac{6}{2\times 6+1}=\frac{6}{13}$ et $u_2=\frac{\frac{6}{13}}{\frac{6}{13}\times 2+1}=\frac{\frac{6}{13}}{\frac{25}{13}}=\frac{6}{25}$

   $u_1-u_0=\frac{6}{13}-6=\frac{6}{13}-\frac{78}{13}=\frac{-72}{13}$ et $u_2-u_1=\frac{6}{25}-\frac{6}{13}=\frac{78}{325}-\frac{150}{325}=\frac{-72}{325}\neq\frac{-72}{13}$

   donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2. $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}}=\frac{2u_n+1}{u_n}=\frac{2u_n}{u_n}+\frac{1}{u_n}=2+\frac{1}{u_n}=2+v_n$ donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r=2$.

3. $r=2>0$ donc la suite (v_n) est croissante.

Exercice 5

On donne le premier terme $u_0=-5$ et la raison $r=7$ d'une suite arithmétique.

1. Déterminer u_1 et u_2
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. Calculer le 26ème terme de la suite.

Correction

1. $u_1=u_0+r=-5+7=2$ et $u_2=u_1+r=2+7=9$.
2. $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_o+n\times r=-5+7n$
3. Le 26ème terme est $u_{25}=-5+7\times 25=170$.

Exercice 6

1. Écrire un algorithme permettant l'affichage de la liste des N premiers termes d'une suite arithmétique à partir de la saisie du premier terme u_0 , de la raison *r* et de N.
2. Le programmer en langage Python.
3. Qu'affiche le programme si l'on saisit $u_0=5$, $r=3$ et $N=10$.

Correction

1.

```
u ← u0
L ← [u]
Pour i allant de 1 à N-1
    u ← u + r
    L ← L+ [u]
Fin Pour
```

2. En langage Python :

```python
u=float(input("u0=?"))
r=float(input("raison r=?"))
N=int(input("N=?"))
L=[u]
for i in range(1,N):
    u=u+r
    L=L+[u]
print(L)
```

3. Si l'on saisit $u_0=5$, $r=3$ et $N=10$, on obtient :

```
u0=?5
raison r=?3
N=?10
[5.0, 8.0, 11.0, 14.0, 17.0, 20.0, 23.0, 26.0, 29.0, 32.0]
```

Exercice 7

(v_n) est une suite arithmétique. Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme v_0

$v_5=16$ et $v_9=28$

$v_3=\frac{-1}{4}$ et $v_{12}=\frac{-5}{2}$

Correction

1. (v_n) est une suite arithmétique donc $\forall k\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}, v_p=v_k+(p-k)r$.

   En particulier $v_9=v_5+(9-5)\times r=v_5+4r$ donc $28=16+4r$ donc $r=\frac{12}{4}=3$.

   De plus $v_5=v_0+5r=v_0+15$ donc $v_0=16-15=1$.

2. (v_n) est une suite arithmétique donc $\forall k\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}, v_p=v_k+(p-k)r$.

   En particulier $v_{12}=v_3+(12-3)\times r=v_3+9r$ donc $\frac{-5}{2}=\frac{-1}{4}+9r$

   donc $9r=\frac{-10}{4}+\frac{1}{4}=\frac{-9}{4}$

   donc $r=\frac{\frac{-9}{4}}{9}=\frac{-9}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{-1}{4}$.

   De plus $v_3=v_0+3r=v_0-\frac{3}{4}$ donc $v_0=\frac{-1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$