Exercice 1 :
Soit $f : x \to 3x^2$. f est-elle dérivable en 2 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 2 ?

Correction
Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :
$f(2+h)-f(2)=3\times(2+h)^2-3\times 2^2=3(4+4h+h^2)-12=12+12h+3h^2-12=12h+3h^2$ d'où
$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{12h+3h^2}{h}=\dfrac{h(12+3h)}{h}=12+3h$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} 12+3h=12$
Or $12 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en $x=2$ et $f'(2)=12$.

Exercice 2 :
Soit $f : x \to |x|$. f est-elle dérivable en 0 ?

Correction
Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$.

1er cas : $si\, h>0, |h|=h$ alors $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$

2ème cas : $si\, h<0, |h|=-h$ alors $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{-h}{h}=-1$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$

Or $-1 \neq 1$ donc f n'est pas dérivable en $x=0$.

Exercice 3 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$

1. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer son nombre dérivé en 1.
2. Vérifier votre résultat à la calculatrice
   CASIO : RUN-MAT + F4 + (d/dx)
   TI : MODE CALCUL + math puis 8 (nombre dérivé)

Correction
Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :
$f(1+h)-f(1)=\left((1+h)^2+(1+h)\right)-(1^2+1)=(1+2h+h^2+1+h)-2=h^2+3h+2-2=h^2+3h$ d'où
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h^2+3h}{h}=\dfrac{h(h+3)}{h}=h+3$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} h+3=3$
Or $3 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en $x=1$ et $f'(1)=3$.

Exercice 4 :

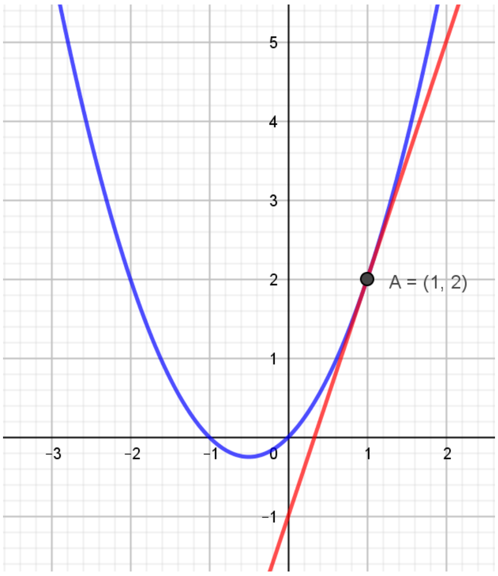
On considère la fonction f précédente définie par $f(x)=x^2+x$

1. Tracer la courbe représentative de f notée (C) et sa tangente (T) au point A d'abscisse 1
2. Déterminer une équation de (T)

Correction

1. C_f et T_1 ci-contre

2. $T_1 : y=f'(1)(x-1)+f(1)$
   $T_1 : y=3(x-1)+2$
   $T_1 : y=3x-3+2$
   $T_1 : y=3x-1$



Exercice 5 :

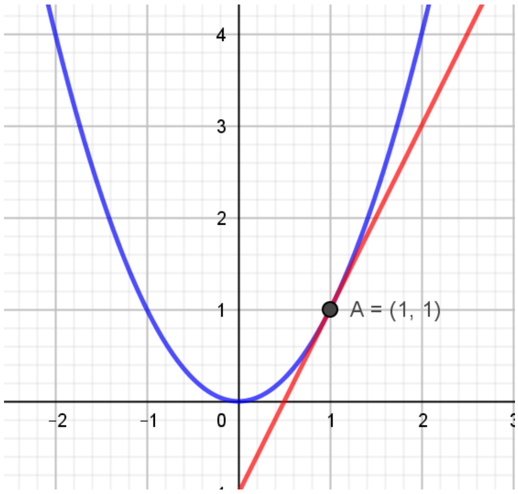
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^2$

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 1
2. Tracer (T) et (C)
3. Existe-t-il une tangente à (C) parallèle à la droite (d) d'équation $y=3x-4$?
   Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

Correction

1. $T_1 : y=f'(1)(x-1)+f(1)$
   Calcul de $f'(1)$
   Soit $h\in\mathbb{R}, h\neq 0$. On a :
   $f(1+h)-f(1)=((1+h)^2)-(1^2)=(1+2h+h^2)-1=h^2+2h$ d'où
   $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h^2+2h}{h}=\dfrac{h(h+2)}{h}=h+2$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} h+2=2$
   Or $2\in\mathbb{R}$ donc f est dérivable en $x=1$ et $f'(1)=2$.

   On déduit :
   $T_1 : y=2(x-1)+1^2$
   $T_1 : y=2x-2+1$
   $T_1 : y=2x-1$



2. C_f et T_1 ci-contre

3. Le coefficient directeur de (d) est $a=3$ ainsi il existe une tangente à C_f parallèle à (d) d'équation $y=3x-4$ si et seulement si il existe un réel x pour lequel $f'(x)=3$.
   $f'(x)=3 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

   C_f admet une tangente parallèle à (d) en $A\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$ car $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$.

Exercice 6 :

1. Calculer la dérivée de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=-2x^4+5x^3-2x+3$
2. Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=-2x-1$ et $v(x)=x^2+1$

   Calculer les dérivées de uv, de u^2 et de $\frac{1}{v}$.
3. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{2x-3}{7} \text{ sur } \mathbb{R} \qquad g(x)=\frac{2x-3}{x+1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Correction

1. p est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
   $\forall x\in\mathbb{R}, p'(x)=-2\times4x^3+5\times3x^2-2=-8x^3+15x^2-2$

2. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ respectivement comme fonction affine et polynôme.
   $\forall x\in\mathbb{R}, u'(x)=-2$ et $v'(x)=2x$

   (uv) est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}, (uv)(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)=-2(x^2+1)+2x\times(-2x-1)$
   $(uv)(x)=-2x^2-2-4x^2-2x=-6x^2-2x-2$

   u^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}, (u^2)'(x)=2u'(x)u(x)=2\times(-2)\times(-2x-1)=-4(-2x-1)=8x+4$

   $\forall x\in\mathbb{R}, v(x)=x^2+1\geqslant1>0$ donc $v(x)\neq0$ donc $\frac{1}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}, (\frac{1}{v})'(x)=-\frac{v'(x)}{v(x)^2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

3. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x-3}{7}=\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{2}{7}$

   $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=\frac{2(x+1)-1(2x-3)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2}=\frac{5}{(x+1)^2}$

Exercice 7 :
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$	$g(x)=(x^3+5)(x^2+3)^2$	$h(x)=\sqrt{x^2+7x}, x>0$	$k(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}, x>1$

Correction

- $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
  $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+1)-2x(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-x^2-1-2x^3+2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$
  $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

- $g(x)=(x^3+5)(x^2+3)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

  $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=3x^2(x^2+3)^2+2\times 2x\times(x^2+3)\times(x^3+5)$
  $g'(x)=(x^2+3)\times\left(3x^2(x^2+3)+4x(x^3+5)\right)=(x^2+3)(3x^4+9x^2+4x^4+20x)$
  $g'(x)=(x^2+3)(7x^4+9x^2+20x)=7x^6+9x^4+20x^3+21x^4+27x^2+60x$
  $g'(x)=7x^6+30x^4+20x^3+27x^2+60x$

- $h(x)=\sqrt{x^2+7x}, x>0$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ avec $x^2+7>0 \text{ pour } x>0$.

  $\forall x>0, h'(x)=\frac{2x+7}{2\sqrt{x^2+7x}}$

- $k(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}, x>1$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$ avec $x-1>0 \text{ pour } x>1$.

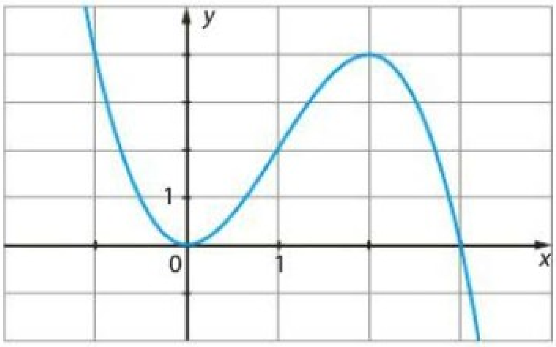
  $\forall x>1, k'(x)=\frac{1\times\sqrt{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\times x}{\sqrt{x-1}^2}=\frac{2(x-1)-x}{2\sqrt{x-1}(x-1)}=\frac{x-2}{2\sqrt{x-1}(x-1)}$

Exercice 8 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+6x+1$.
Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

Correction
$f(x)=-x^2+6x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-2x+6$. Or, :
$f'(x)=0\Leftrightarrow -2x+6=0\Leftrightarrow x=3$
$f'(x)>0\Leftrightarrow -2x+6>0\Leftrightarrow x<3$
$f'(x)<0\Leftrightarrow -2x+6<0\Leftrightarrow x>3$

donc f est croissante sur $]-\infty;3[$ et décroissante sur $]3;+\infty[$.

Exercice 9 :
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont on connaît la représentation graphique ci-dessous :



1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

Correction

1. Par lecture graphique, f semble décroissante sur $]-\infty;0]$ puis croissante sur $[0;2]$ puis décroissante sur $[2;+\infty[$.

2. On déduit que $f'(x)\leqslant 0$ pour $x\leqslant 0$ ou $x\geqslant 2$ et $f'(x)\geqslant 0$ pour $0\leqslant x\leqslant 2$.

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur [-1;3] par $f(x)=-x^2+4x+1$

1. Calculer la dérivée de f et déterminer le signe de cette dérivée.
2. (a) Étudier le sens de variation de f sur [-1;3] et construire son tableau de variations
   (b) Vérifier la cohérence du résultat avec votre calculatrice

Correction

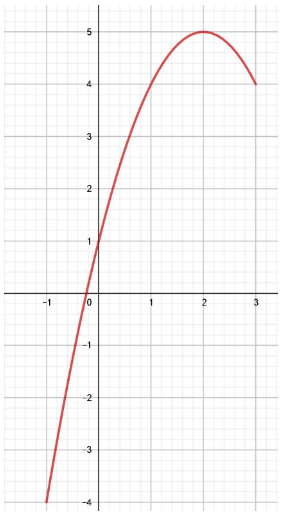
1. f est dérivable sur [-1;3] comme fonction polynôme.
   Pour tout réel $-1 \leqslant x \leqslant 3, f'(x)=-2x+4$.
   $f'(x)=-2x+4=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=2$
   $f'(x)>0 \Leftrightarrow -2x>-4 \Leftrightarrow x<2$
   $f'(x)<0 \Leftrightarrow -2x<-4 \Leftrightarrow x>2$

2. (a) On déduit que f est croissante sur [-1;2] et décroissante sur [2;3].

(a)

x	-1		2		3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-4	↗	5	↘	4

(b)

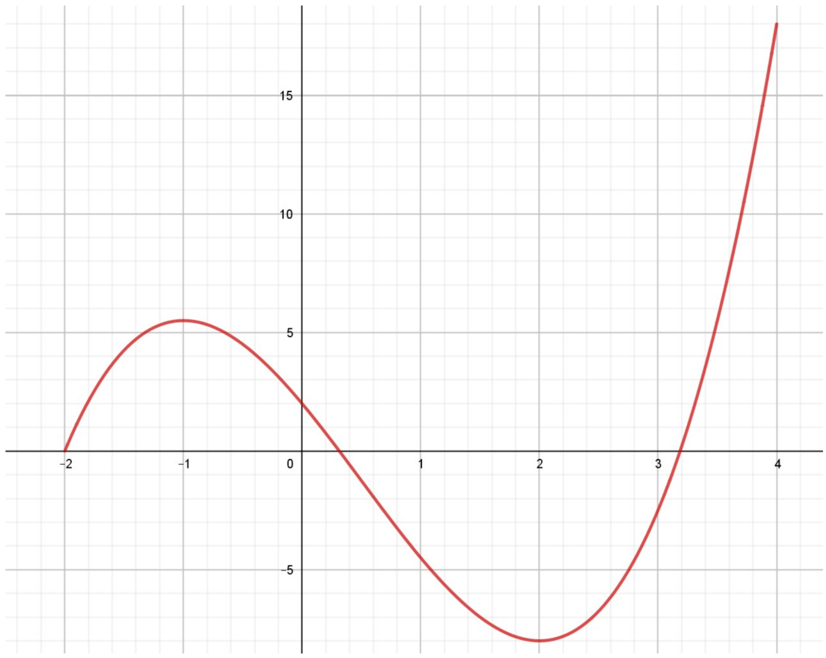


Exercice 11 :
Soit f la fonction définie sur [-2;4] par $f(x)=x^3-1{,}5x^2-6x+2$.

1. Tracer la représentation graphique de f sur la calculatrice
   Par lecture graphique, en quelle valeur x , f semble-t-elle admettre un minimum ?
2. (a) Calculer la dérivée de f sur [-2;4] .
   (b) Déterminer les extremums de f sur [-2;4] .
   (c) Déterminer un encadrement de $f(x)$ sur [-2;4] .

Correction

1.



Par lecture graphique, f semble admettre un minimum en $x=2$.

2. (a) f est dérivable sur [-2;4] comme fonction polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=3x^2-3x-6$
   (b) $x_1=-1$ est une racine évidente de $f'(x)$ donc la deuxième racine x_2 vérifie
   $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow -x_2 = \frac{-6}{3} = -2 \Leftrightarrow x_2 = 2$. Ainsi, f admet deux extrema sur [-2;4], l'un en $x=-1$ qui est un minimum qui vaut $f(-1)=5{,}5$ et l'autre en $x=2$ qui est un maximum qui vaut $f(x)=2=-8$.

3. On déduit que $\forall -2 \leqslant x \leqslant 4, -8 \leqslant f(x) \leqslant 5{,}5$.

Exercice 12 :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^3-3x+2$

1. Construire le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de h sur $[-1;+\infty[$

2. Calculer $h(-2)$ et en déduire le signe de h sur $]-\infty;-2]$.

3. Démontrer que, pour tout x de sur $[-2;+\infty[$, $x^3 \geqslant 3x-2$

Correction

1. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et
$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$
$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=1$
$h'(x)>0 \Leftrightarrow x<-1 \text{ ou } x>1$
$h'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$

On déduit le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$		↗	4	↘	0	↗	

D'après le tableau de variations, h admet un minimum en $x=1$ sur $[1;+\infty[$ qui vaut $h(1)=0$ donc $\forall x \geqslant -1, h(x) \geqslant 0$.

2. $h(-2)=(-2)^3-3\times(-2)+2=-8+6+2=0$. Or h est croissante sur $]-\infty;-1]$.
On déduit que $\forall x \leqslant -2, h(x) \leqslant 0$.

3. Du **1.** et **2.** , on déduit que $\forall x \geqslant -2, h(x) \geqslant 0$ donc $\forall x \geqslant -2, x^3-3x^2+2 \geqslant 0$ donc $\forall x \geqslant -2, x^3 \geqslant 3x-2$.