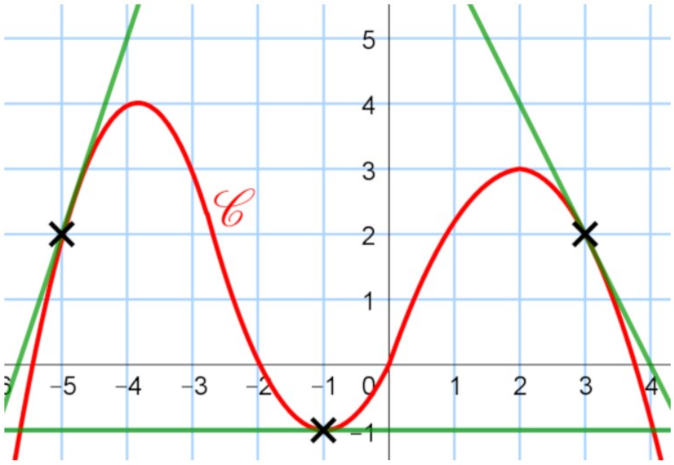
La calculatrice est autorisée

Exercice 1

Dans le repère orthonormé ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f .
Les droites sont les tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses -5 ; -1 et 3.

1. (a) Lire $f(-5)$ puis $f'(-5)$.
   (b) En déduire l'équation de la tangente T_{-5} à la courbe C_f au point d'abscisse -5.
2. (a) Lire $f(-1)$ puis $f'(-1)$.
   (b) En déduire l'équation de la tangente T_{-1} à la courbe C_f au point d'abscisse -1.
3. (a) Lire $f(3)$ puis $f'(3)$.
   (b) En déduire l'équation de la tangente T_3 à la courbe C_f au point d'abscisse 3.



Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{5-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f de la fonction.
2. Montrer que le taux d'accroissement de f entre les points $1+h$ et 1 est $r(h)=\dfrac{-1}{\sqrt{4-h}+2}$.
3. En déduire le nombre dérivé de f en $a=1$.
4. Calculer $f'(x)$ puis retrouver le résultat de $f'(1)$.
5. Déterminer l'équation réduite de sa tangente T_1 au point d'abscisse $x=1$?

Exercice 3

Une entreprise fabrique x objets par jour, avec $x \in [\,0;20\,]$. Le coût total de production de x objets, exprimé euros, est donné par $C(x)=x^3-30x^2+300x$. On suppose que toute la production est vendue.

1. Exprimer la recette totale $R(x)$, en fonction du nombre x d'objets vendus au prix unitaire de 108€.
2. Montrer que la fonction bénéfice $B(x)$, en fonction du nombre x d'objets vendus, en euros, est donnée par l'expression $B(x)=-x^3+30x^2-192x$.
3. (a) Calculer $B'(x)$ pour tout $x \in [\,0;20\,]$
   (b) Montrer que $B'(x)$ peut s'écrire sous la forme $B'(x)=3(4-x)(x-16)$.
4. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ et le tableau de variations de la fonction B sur $[\,0;20\,]$.
5. (a) Quelle quantité d'objets l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal ?
   (b) Donner la valeur de ce bénéfice maximal en euros.
6. Quelle quantité d'objets l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour être bénéficiaire ?
   On donnera le résultat sous la forme d'un intervalle.

Exercice 4

Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour. Le coût de production, en milliers d'euros, pour x milliers de pièces produites, est donné par la fonction $C(x)=0,5x^3-3x^2+x+16$ et le coût moyen est donné par l'expression $C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.

1. Calculer le coût et le coût moyen de production pour 2 milliers de pièces produites.
2. Montrer que $C_M(x)=0,5x^2-3x+1+\dfrac{16}{x}$.
3. Calculer $C'_M(x)$ et montrer que $C'_M(x)$ peut s'écrire sous la forme $C'_M(x)=\dfrac{x^3-3x^2-16}{x^2}$.
4. Vérifier que pour tout réel x, $x^3-3x^2-16=(x-4)(x^2+x+4)$.
5. En déduire le tableau de variations de C_M sur $[\,1;5\,]$.
6. Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal.
7. Calculer la valeur de ce coût moyen minimal.

La calculatrice est autorisée

Exercice 1

1. (a) $f(-5)=2$ et $f'(-5)=3$.
   (b) $T_{-5}: y=f'(-5)(x+5)+f(-5) \Leftrightarrow y=3(x+5)+2 \Leftrightarrow y=3x+17$.

2. (a) $f(-1)=-1$ et $f'(-1)=0$.
   (b) $T_{-1}: y=-1$.

3. (a) $f(3)=2$ et $f'(3)=-2$.
   (b) $T_3: y=f'(3)(x-3)+f(3) \Leftrightarrow y=-2(x-3)+2 \Leftrightarrow y=-2x+8$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{5-x}$.

1. $f(x)=\sqrt{5-x}$ est définie pour les réels x tels que $5-x \geqslant 0$.
   Or, $5-x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 5$ donc $D_f=]-\infty;5]$
   $f(x)=\sqrt{5-x}$ est dérivable pour les réels x tels que $5-x>0$.
   Or, $5-x>0 \Leftrightarrow x<5$ donc $D_{f'}=]-\infty;5[$.

2. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ et $1+h<5$. On a :

$$r(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{5-(1+h)}-\sqrt{5-1}}{h}=\frac{\sqrt{4-h}-\sqrt{4}}{h}=\frac{\sqrt{4-h}-2}{h}$$

$$r(h)=\frac{(\sqrt{4-h}-2)\times(\sqrt{4-h}+2)}{h(\sqrt{4-h}+2)}=\frac{(\sqrt{4-h})^2-2^2}{h(\sqrt{4-h}+2)}=\frac{4-h-4}{h(\sqrt{4-h}+2)}=\frac{-h}{h(\sqrt{4-h}+2)}=\frac{-1}{\sqrt{4-h}+2}$$

On déduit $\lim\limits_{h \to 0} r(h)=\lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{\sqrt{4-h}+2}=-\frac{1}{\sqrt{4}+2}=-\frac{1}{2+2}=-\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$ donc $f'(1)=-\frac{1}{4}$

3. Soit $x<5$. On a :
   $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x)=5-x$ et $u'(x)=-1$ donc $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$ donc $f'(1)=\frac{-1}{2\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$.

4. $T_1: y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}(x-1)+2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

Exercice 3

1. Soit $x \in [0;20]$. On a $R(x)=108x$.

2. Soit $x \in [0;20]$. On a $B(x)=R(x)-C(x)$,
$B(x)=108x-(x^3-30x^2+300x)=108x-x^3+30x^2-300x=-x^3+30x^2-192x$

3. B est une fonction polynôme définie sur $[0;20]$ donc dérivable sur $[0;20]$.
Soit $x \in [0;20]$. On a $B'(x)=-3x^2+60x-192$.
Or, $3(4-x)(x-16)=(12-3x)(x-16)=12x-192-3x^2+48x=-3x^2+60x-192=B'(x)$
donc $B'(x)=3(4-x)(x-16)$ pour tout $x \in [0;20]$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$4-x=0 \Leftrightarrow x=4$ et $4-x>0 \Leftrightarrow x<4$ et $x-16=0 \Leftrightarrow x=16$ et $x-16>0 \Leftrightarrow x>16$ et $3>0$.
On déduit le tableau de signes de $B'(x)$ sur $[0;20]$:

x	0		4		16		20
Signe de 3		+		+		+	
Signe de $4-x$		+	0	−		−	
Signe de $x-16$		−		−	0	+	
Signe de $B'(x)$		−	0	+	0	−	

Et le tableau de variations de B sur $[0;20]$:

x	0		4		16		20
$B'(x)$		-	0	+	0	-	
B	0	↘	-352	↗	512	↘	160

5. (a) D'après le tableau de variations, la fonction B a un maximum en $x=16$.
(b) Ce bénéfice maximal vaut $B(16)=-16^3+30\times16^2-192\times16=512$ €.

6. L'entreprise est bénéficiaire lorsque $B(x)>0$ avec $x \in [0;20]$.
Or, $B(x)=x(-x^2+30x-192)$.
Or, $x \geqslant 0$ donc le signe de $B(x)$ est du signe de $f(x)=-x^2+30x-192$.

Étude du signe de $f(x)=-x^2+30x-192$ sur $[0;20]$.
$\Delta=b^2-4ac=30^2-4\times(-1)\times(-192)=900-768=132>0$ donc f a deux racines réelles distinctes :
$x_1=\dfrac{-30-\sqrt{132}}{-2}=15+\sqrt{33}\approx20{,}7>0$ et $x_2=\dfrac{-30+\sqrt{132}}{-2}=15-\sqrt{33}\approx9{,}2\in[0;20]$
Or $a=-1<0$ d'où le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0;20]$:

x	0		x_2		20
$B(x)$		-	0	+	

Conclusion : On déduit que l'entreprise est bénéficiaire lorsqu'elle produit et vend entre 10 et 20 objets c'est à dire pour $x \in [10;20]$.

Exercice 4

1. $C(2)=0,5\times 2^{\$}3-3\times 2^2+2+16=0,5\times 8-3\times 4+2+16=4-12+2+16=10$
   $C_M(2)=\dfrac{C(2)}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

   Conclusion : le coût de production pour 2000 pièces vaut 10 000€ et le coût moyen vaut 5000€

2. Soit $x\in[1;5]$: On a $C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{0,5x^3-3x^2+x+16}{x}=0,5x^2-3x+1+\dfrac{16}{x}$.

3. C_M est dérivable sur $[1;5]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1;5]$ dont la fonction $x\to\dfrac{16}{x}$ ne s'annule pas sur $[1;5]$. Soit $x\in[1;5]$: On a
   $C'_M(x)=0,5\times 2x-3+0-\dfrac{16}{x^2}=x-3-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{x^3-3x^2-16}{x^2}$.

4. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $(x-4)(x^2+x+4)=x^3+x^2+4x-4x^2-4x-16=x^3-3x^2-16$.

5. On déduit que $\forall x\in[1;5], C'_M(x)=\dfrac{(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$.
   Or, $\forall x\in[1;5], x^2+x+4>0$ et $x^2>0$ donc le signe de $C'_M(x)$ est le signe de $(x-4)$.
   Or, $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ et $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$.
   On déduit le tableau de signes de $C'_M(x)$ puis de variations de C_M :

x	1		4		5
$x-4$		$-$	0	$+$	
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
C_M		$\searrow$		$\nearrow$	

6. On déduit que le coût moyen est minimal pour $x=4$ c'est à dire pour 4000 pièces produites.
7. Le coût minimal vaut alors $C_M(4)=\dfrac{C(4)}{4}=\dfrac{0,5\times 4^3-3\times 4^2+4+16}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ soit 1000€.