

Chapitre 3 : Probabilités conditionnelles

I. Fréquences marginales et fréquences conditionnelles

On considère une population E et on s'intéresse à deux caractères A et B de cette population simultanément. On peut alors regrouper ces données dans un tableau croisé d'effectifs dans lequel figure une colonne « Total » et une ligne « Total » que l'on nomme **les marges**.

Définitions :

- **La fréquence marginale** d'un caractère A est le quotient de l'effectif marginal de ce caractère A par l'effectif total de la population soit $f(A) = \frac{\text{effectif total de A}}{\text{effectif total}}$.
- **La fréquence conditionnelle** du caractère A dans la sous-population possédant le caractère B est le quotient du nombre d'individus présentant les deux caractères A et B par l'effectif marginal du caractère B soit $f_B(A) = \frac{\text{effectif vérifiant à la fois A et B}}{\text{effectif marginal de B}}$.

Exemple : La tableau ci-dessous donne la répartition des adhérents d'un club sportif selon leur tranche d'âge et leur sexe.

	Femme	Homme	Total
[5 ; 20 [8	16	24
[20 ; 40 [13	12	25
[40 ; 60 [6	8	14
[60 ; 80]	2	5	7
Total	29	41	70

La fréquence marginale des femmes est $f = \frac{29}{70} \approx 0,41$.

La fréquence marginale des adhérents âgés entre 5 et 20 ans est $f = \frac{24}{70} \approx 0,34$.

La fréquence conditionnelle des hommes parmi les plus de 60 ans est $f = \frac{5}{7} \approx 0,71$.

La fréquence conditionnelle des adhérents dont l'âge est entre 40 et 60 ans parmi les femmes est $f = \frac{6}{29} \approx 0,21$.

Remarques :

- Une fréquence peut s'exprimer sous la forme d'une fraction, sous la forme d'un nombre décimal ou sous la forme d'un pourcentage.
- Une fréquence est toujours comprise entre 0 et 1.

II. Probabilités conditionnelles

1. Définition et propriété

Définitions : On appelle **univers**, noté Ω , l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements de l'univers Ω tel que $p(A) \neq 0$. La probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A s'est réalisé est le nombre noté $p_A(B)$ et défini par $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Remarques :

- Il s'agit d'une nouvelle probabilité, dite probabilité conditionnelle.
- $p_A(B)$ peut aussi se noter $p(B|A)$.
- $p_A(A) = 1$.

Exemple : Dans une population, 65% des personnes ont les yeux marrons et 15% des personnes ont les cheveux blonds. De plus, 5% des personnes ont les yeux marrons et les cheveux blonds. On rencontre par hasard une personne de cette population.

On considère les événements suivants :

- M : « la personne rencontrée a les yeux marrons »
- B : « la personne rencontrée a les cheveux blonds ».

On veut donc déterminer la probabilité que la personne choisie ait les cheveux blonds sachant qu'elle a les yeux marrons, autrement dit, $p_M(B)$ et la probabilité que la personne choisie ait les yeux marrons sachant qu'elle a les cheveux blonds, autrement dit, $p_B(M)$

D'après l'énoncé, on a : $p(M) = 0,65$; $p(B) = 0,15$ et $p(M \cap B) = 0,05$.

Ainsi $p_M(B) = \frac{p(M \cap B)}{p(M)} = \frac{0,05}{0,65} \approx 0,08$ et $p_B(M) = \frac{p(M \cap B)}{p(B)} = \frac{0,05}{0,15} \approx 0,33$

Cela signifie que parmi les personnes qui ont les yeux marrons, il y a 8% de personnes qui ont les cheveux blonds et parmi les personnes qui ont les cheveux blonds, il y a 33% de personnes qui ont les yeux marrons.

Remarques :

- Attention : Il ne faut pas confondre $p_A(B)$ et $p_B(A)$.
- Dans un problème de probabilité, il faut faire attention aux mots clés : les mots « et » ou « ayant » indique souvent une probabilité d'intersection alors que les mots « parmi » ou « sachant » indique souvent une probabilité conditionnelle.

Propriétés : Soit A et B deux événements tel que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

2. $0 \leq p_A(B) \leq 1$
3. $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$ donc $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$
4. $p(A \cap B)$ peut se calculer de deux manières :
 $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ ou $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

2. Utilisation de tableau

Dans un tableau a double entrée, on trouve à l'intersection des lignes et des colonnes les probabilités d'intersection donc l'utilisation d'un tableau à double entrée permet de calculer des probabilités conditionnelles. **On va donc choisir de modéliser une situation de probabilité par un tableau si la situation nous donne des probabilités d'intersection.**

Exemple : Dans un club de bridge, on sait que 20% des adhérents ont eu la grippe et 40% des adhérents se sont fait vacciner. On sait également que 2% des adhérents ont eu la grippe malgré qu'il se soit fait vacciner. Cette dernière information étant une probabilité d'intersection, on peut choisir de modéliser cette situation par le tableau ci-dessous où les données en noires ont été déduites des autres.

	Grippé	Non grippé	Total
Vacciné	0,02	0,38	0,4
Non vacciné	0,18	0,42	0,6
Total	0,2	0,8	1

On choisit au hasard un adhérent au hasard. On appelle :

- V : « l'adhérent choisi est vacciné »
- G : « l'adhérent choisi est grippé »

On souhaite maintenant tester l'efficacité du vaccin : il faut donc comparer la probabilité que l'adhérent choisi soit grippé sachant qu'il est vacciné ($p_V(G)$) avec la probabilité que l'adhérent soit grippé sachant qu'il n'était pas vacciné ($p_{\bar{V}}(G)$).

D'après le tableau, $p(V \cap G) = 0,02$ et $p(V) = 0,4$ donc $p_V(G) = \frac{p(V \cap G)}{p(V)} = \frac{0,02}{0,4} = 0,05$

et $p(\bar{V} \cap G) = 0,18$ et $p(\bar{V}) = 0,6$ donc $p_{\bar{V}}(G) = \frac{p(\bar{V} \cap G)}{p(\bar{V})} = \frac{0,18}{0,6} = 0,3$.

$p_V(G) < p_{\bar{V}}(G)$: on peut constater que le vaccin est efficace.

III. Arbres pondérés et probabilités totales

1. Arbres pondérés

Dans le cas d'une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles, on peut modéliser la situation à l'aide d'un **arbre pondéré**.

Pour cela, on peut envisager deux niveaux de branches : un premier qui indique la probabilité d'un événement A et celle de son événement contraire \bar{A} , puis un second niveau qui permet de figurer **les probabilités conditionnelles** comme celle d'un événement B sachant que l'événement A est réalisé ($p_A(B)$) sur la branche liant A à B par exemple.

Définitions :

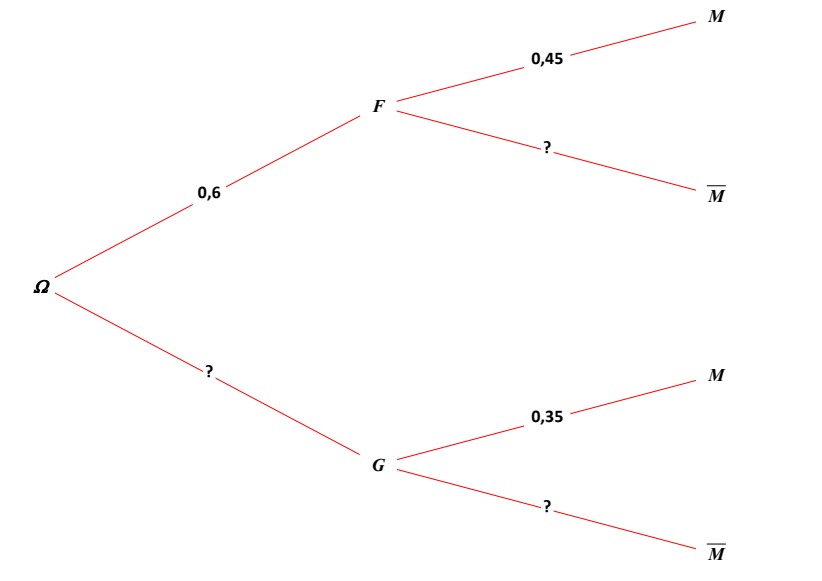
- Dans un arbre pondéré, un **chemin** est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés le long du chemin.
- La probabilité d'un chemin complet est la **probabilité de l'intersection** des événements rencontrés le long de ce chemin.
- Un **nœud** est le point de départ d'une ou de plusieurs branches.

Propriétés :

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à **1**
- La probabilité d'un chemin complet est égale **au produit** des probabilités des branches rencontrées le long de ce chemin. (Cela est dû au fait que $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$).

Exemple : Dans une classe de terminale, 60% des élèves sont des filles. On sait aussi que 45% des filles et 35% des garçons sont majeurs. Ces deux dernières informations sont des probabilités conditionnelles donc on peut modéliser cette situation comme dans l'arbre ci-dessous. On note :

- F : « l'élève est une fille »
- G : « l'élève est un garçon »
- M : « l'élève est majeur »



On retrouve que $p(F)=0,6$, $p_F(M)=0,45$ et $p_G(M)=0,35$.

On peut alors en déduire que $p(F \cap M)=p(F) \times p_F(M)=0,6 \times 0,45=0,27$ autrement dit, la probabilité qu'un élève soit une fille et majeure est de 0,27

Propriété : Propriété des probabilités totales

Pour calculer la probabilité d'un événement en 2ème niveau d'un arbre pondéré, on additionne les probabilités associés à tous les chemins menant à cet événement, autrement dit, si A et B deux événements alors on a : $p(B)=p(A \cap B)+p(\bar{A} \cap B)$.

Exemple : en reprenant l'arbre ci-dessus, comme l'événement contraire de F est G , on a :

$$p(M)=p(F \cap M)+p(G \cap M)=0,6 \times 0,45+0,4 \times 0,35=0,41$$

IV. Probabilités et indépendance

1. Indépendance de deux événements

Définition : On considère deux événements A et B de probabilité non-nulle d'un univers Ω .

On dit que les deux événements sont **indépendants** si $p(A \cap B)=p_A \times p_B(A)$, autrement dit, si la réalisation de l'événement A n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'événement B .

Exemple : On donne la répartition des licenciés dans un club.

	Adulte	Enfant	Total
Handball	73	174	247
Basket-ball	45	135	180
Gymnastique	14	87	101
Total	132	396	528

On tire au sort une personne de ce club pour une tombola et on considère les événements :

- A : « la personne est un adulte »
- B : « la personne pratique le basket-ball »
- E : « la personne est un enfant »
- G : « la personne pratique la gymnastique »

$p(A)=\frac{132}{528}=0,25$ et $p_B(A)=\frac{45}{180}=0,25$ donc $p(A)=p_B(A)$ donc les événements A et B sont indépendants.

$p(E)=\frac{396}{528}=0,75$ et $p_G(E)=\frac{87}{101} \approx 0,86$ donc $p(E) \neq p_G(E)$ donc les événements E et G ne sont pas indépendants.

Remarque : Il ne faut confondre les événements incompatibles et les événements indépendants.

Propriété : A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Démonstration :

A et B sont deux événements indépendants $\Leftrightarrow p(B) = p_A(B)$

A et B sont deux événements indépendants $\Leftrightarrow p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

A et B sont deux événements indépendants $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ #

2. Succession de deux épreuves indépendantes

Définition : En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soient indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise **une succession de deux épreuves indépendantes**.

Remarques :

- Deux épreuves sont indépendantes si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.
- Lors de la répétition de deux épreuves indépendantes identiques, les probabilités de chaque issue ne changent pas.
- On peut assimiler la répétition de deux épreuves indépendantes identiques à deux tirages successifs avec remise. En effet, lors de deux tirages successifs avec remise, le résultat du premier tirage n'influence pas celui obtenu au second tirage.

On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un arbre pondéré dont les pondérations sont les probabilités des différents résultats pour chacune des épreuves. Les épreuves étant indépendantes, les probabilités du second niveau **ne sont pas conditionnelles** et reste donc les mêmes sur tout le deuxième niveau.

Exemple : On considère l'expérience suivante qui se déroule en deux étapes. On tire une boule dans une urne 1 qui contient 1 boule verte (V), 1 boule rouge (R) et 2 boules bleues (B) puis on tire une boule dans une urne 2 qui contient 3 boules oranges (O) et deux boules jaunes (J)

On peut modéliser cette situation par l'arbre ci-dessous :

