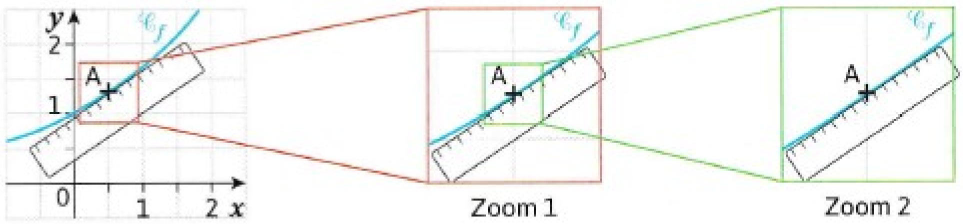
Chapitre 4 : Dérivation

I. Tangente et nombre dérivé

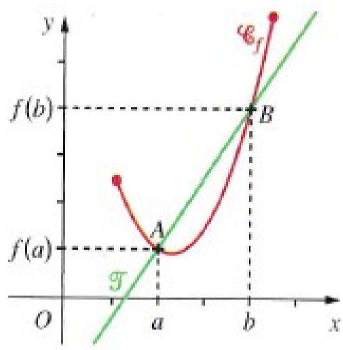
1. Tangente en un point d'une courbe

Dans le plan muni d'un repère, on note C_f la courbe lisse (c'est à dire sans irrégularité) d'une fonction f et A un point de la courbe d'abscisse a.
Par des zooms successifs, on observe que la courbe C_f a, autour du point A, l'apparence d'une droite.



Cette droite est appelée la **tangente à la courbe C_f au point A** d'abscisse a.

Définition : Pour tout nombre réel b distinct de a, on note B le point de la courbe C_f d'abscisse b. La droite (AB) est appelée **droite sécante** à la courbe C_f en A et en B.



Remarque : Le coefficient directeur de la sécante à la courbe C_f en A et B est égale à $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

On retrouve le taux d'accroissement de f entre a et b.

Définition : Lorsque que le point B se rapproche du point A, la droite sécante (AB) semble se rapprocher d'une position limite. Cette droite limite s'appelle **la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.**

Remarques :

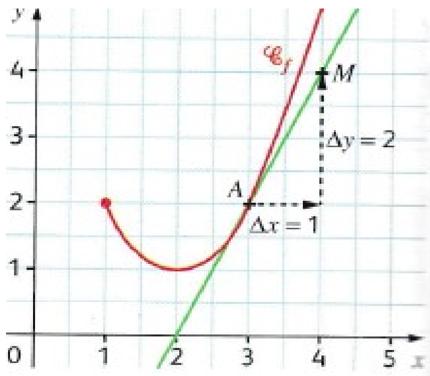
- *Le point* $A(a\,;f(a))$ *est le point de contact de la tangente avec la courbe C_f.*
- *La tangente à une courbe est une approximation affine de la courbe au voisinage du point, autrement dit, lorsque l'on se situe dans un espace très proche autour du point, la courbe est quasiment confondue avec la tangente.*

2. Nombre dérivé et tangente

Définition : Lorsque que la courbe C_f admet une tangente T au point d'abscisse a, on dit que la fonction f est dérivable en a. Le **coefficient directeur de T** est appelé **le nombre dérivé de f en a** et sera noté $\boldsymbol{f'(a)}$.

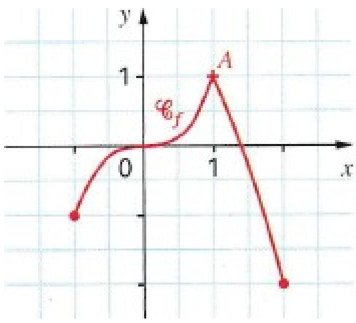
Remarques :

- *Le nombre dérivé d'une fonction f en a correspond à la valeur vers laquelle se rapproche le taux d'accroissement* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *de f entre a et b lorsque b se rapproche de a. La calculatrice permet de déterminer une valeur approchée du nombre dérivé.*
- *Si* $f'(a)=0$ *, la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses, on parlera alors de tangente horizontale.*
- *Pour déterminer graphiquement le nombre dérivé en a d'une fonction f, on repère le point de la courbe de f d'abscisse a, puis on détermine la pente de la tangente à la courbe en ce point. Sur l'exemple ci-contre on peut lire sur le graphique que* $f'(3)=2$.
- *Pour tracer la tangente au point A d'abscisse a d'une courbe, on relie A à un deuxième point obtenu en utilisant* $f'(a)$ *, le nombre dérivé en a.*



- *Le nombre dérivé* $f'(a)$ *représente une vitesse instantanée si f représente la distance parcourue d'un objet, ou encore un coût marginal si f représente le coût d'un produit.*

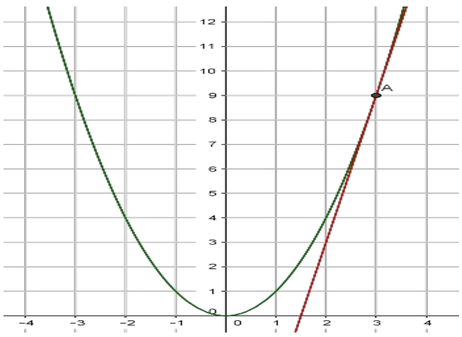
<u>Exemple de fonction non dérivable :</u>
Pour qu'une fonction soit dérivable en *a*, sa courbe doit avoir une tangente en son point d'abscisse *a*. Il existe des fonctions qui ne possèdent pas cette propriété ; le graphique ci-contre en est un exemple.
On peut observer au point A d'abscisse 1 que la courbe n'admet pas de tangente car c'est un point « anguleux » de la courbe. La fonction f n'est donc pas dérivable en 1.



3. Équation réduite d'une tangente

Propriété : **L'équation réduite de la tangente** à une courbe C_f représentant une fonction *f* au point *A* d'abscisse *a* est donnée par $\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

Exemple :
On a tracé sur le graphique ci-contre la fonction carré.
On considère le point A d'abscisse 3, on a alors $f(3)=3^2=9$.
Grâce à la calculatrice, on peut obtenir $f'(3)=6$.
La **tangente à la courbe** de la fonction carré au point d'abscisse 3 est la droite passant par le point $(3;9)$ et de coefficient directeur 6.
L'équation de cette tangente est donnée par :



$$y=f'(3)(x-3)+f(3)$$
$$y=6(x-3)+9$$
$$y=6x-18+9$$
$$y=6x-9 \quad .$$

II. Fonctions dérivées

1. Fonction dérivée

Définition : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout nombre réel x de I, le nombre dérivé $f'(x)$ existe. On dit alors que ***f* est dérivable sur l'intervalle I**.

Définition : On appelle **fonction dérivée de *f* (ou encore dérivée de *f*)**, notée f' , la fonction qui a tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Tableau des dérivées des fonctions usuelles (A connaître par cœur !!)

Fonction	f	Étant dérivable sur...	f'
Constante	$f(x)=k$ avec $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=0}$
Identité	$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=1}$
Affine	$f(x)=mx+p$ avec $m,p\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=m}$
Carré	$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=2x}$
Cube	$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=3x^2}$

Remarque : La fonction dérivée permet de calculer le nombre dérivé sans utiliser la calculatrice et donc d'obtenir l'équation de n'importe quelle tangente.

Exemples :

- Si $f(x)=x^2$ alors $f'(x)=2x$ ainsi on retrouve que $f'(3)=2\times 3=6$.
- Si $g(x)=x^3$ alors $g'(x)=3x^2$ et donc on a $g'(-2)=3\times(-2)^2=3\times 4=12$

2. Opérations sur les dérivées

Propriété : Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un même intervalle I.
La fonction somme $\boldsymbol{u+v}$ est dérivable sur I et, pour tout x de I,

$$\boldsymbol{(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)}$$

Remarques :

- *On pourra retenir plus simplement* $(u+v)'=u'+v'$.
- *La fonction différence* $u-v$ *est dérivable sur I et* $(u-v)'=u'-v'$.

Exemple : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$.
f est la somme de la fonction carré et de la fonction affine.
Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc *f* est également dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x+1$.

Propriété : Soi u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
La fonction ku est dérivable sur I et, pour tout x de I, on a $\boldsymbol{(ku)'(x)=k\times u'(x)}$.

Remarque : On pourra retenir plus simplement $\boldsymbol{(ku)'=ku'}$.

Exemple : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4x^3$.
g est le produit de la fonction cube par le nombre 4.
La fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est également dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=4\times 3x^2=12x^2$.

III. Sens de variations d'une fonction

Propriété : Soit *f* une fonction **dérivable** sur un intervalle I.

1. *f* est **croissante sur I** si, et seulement si, pour tout $x\in I$, $\boldsymbol{f'(x)\geq 0}$.
2. *f* est **décroissante sur I** si, et seulement si, pour tout $x\in I$, $\boldsymbol{f'(x)\leq 0}$.
3. *f* est **constante sur I** si, et seulement si, pour tout $x\in I$, $\boldsymbol{f'(x)=0}$.

Méthode pour déterminer le sens de variation d'une fonction sur un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+8x-3$.

f est la somme et le produit par des nombres de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-2\times 2x+8=-4x+8$.

Déterminons le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$$-4x+8=0 \Leftrightarrow -4x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{-8}{-4} \Leftrightarrow x=2$$

$$-4x+8\geqslant 0 \Leftrightarrow -4x\geqslant -8 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow x\leqslant 2$$

De plus $f(2)=-2\times 2^2+8\times 2-3=-2\times 4+8\times 2-3=-8+16-3=5$.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	5	$\searrow$	

On peut remarquer que f admet un maximum qui est 5 et que ce maximum est atteint pour $x=2$.

Remarque : L'étude des variations d'une fonction, et donc du signe de sa dérivée, permet de mettre en évidence des extremums de la fonction lorsqu'il y en a. On prêtera particulièrement attention aux valeurs en lesquelles la dérivée s'annule et change de signe.

Exercice : Soit g la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par $g(x)=x^3+0{,}5x^2-4x+1$.

1. Déterminer, pour tout $x\in[-2\,;4]$, l'expression de $g'(x)$.
2. Démontrer que $g'(x)=(3x+4)(x-1)$.
3. Étudier de signe de $g'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de *g*.
4. Déterminer les extremums de g sur $[-2\,;4]$.

Correction

1. $g(x)=x^3+0{,}5x^2-4x+1$. g est la somme et le produit par des nombres de fonctions dérivables sur $[-2\,;4]$ donc g est dérivable sur $[-2\,;4]$.
   Pour tout $x\in[-2\,;4$, $g'(x)=3x^2+0{,}5\times 2x-4=3x^2+x-4$.

2. $(3x+4)(x-1)=3x^2-3x+4x-4=3x^2+x-4=g'(x)$.

3. Signe de $3x+4$:

$3x+4=0 \Leftrightarrow 3x=-4 \Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$ et $3x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x \geqslant -4 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{4}{3}$

Signe de $x-1$:

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ et $x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

De plus $f(-2)=3$, $f\left(\dfrac{-4}{3}\right)=\dfrac{131}{27}$, $f(1)=-1{,}5$ et $f(4)=57$

4. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-2		$\frac{-4}{3}$		1		4
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	3	$\nearrow$	$\frac{131}{27}$	$\searrow$	-1.5	$\nearrow$	57

$\dfrac{131}{27} \approx 4{,}85$ donc sur $[-2\,;4]$, le minimum de g est -1,5 et le maximum de g est 57.