

Chapitre 1 : Croissance linéaire

I. Les fonctions affines

1. Définitions et représentation graphique

Définition : Une fonction **affine** est une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

Cas particuliers :

- Si $b=0$, la fonction f est dite **linéaire**.
- Si $a=0$, la fonction f est dite **constante**.

Exemples :

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - 3$ est une fonction affine.
- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -5x$ est une fonction linéaire.
- La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2$ est une fonction constante.

Propriétés :

- Dans un repère du plan, une fonction affine est représentée par **une droite**.
- Réciproquement, dans un repère du plan, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Remarques :

- Le nombre a est le *coefficient directeur* de la droite, il représente la *pente* de la droite
- Le nombre b est l'*ordonnée à l'origine* c'est à dire la valeur où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Conséquences : Pour construire la représentation graphique d'une fonction affine, il suffit de :

- Calculer l'image de deux valeurs bien choisies pour en déduire les coordonnées de deux points facile à placer.
- Placer ces deux points dans un repère puis tracer la droite.

OU

- Utiliser les notions de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine.

Exemple : $f : x \rightarrow \frac{2}{3}x - 1$

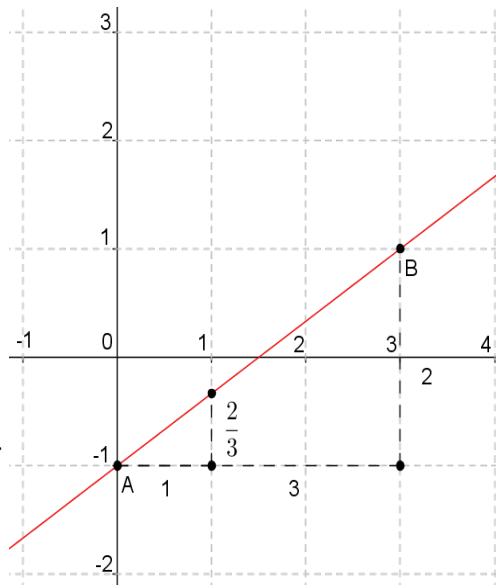
1^{ère} méthode : à l'aide de deux points

f est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite (d).

$$f(0) = \frac{2}{3} \times 0 - 1 = -1 \text{ donc } A(0; -1) \text{ appartient à (d).}$$

$$f(3) = \frac{2}{3} \times 3 - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ donc } B(3; 1) \text{ appartient à (d).}$$

On place les points $A(0; -1)$ et $B(3; 1)$ puis on trace la droite (AB).



2^{ème} méthode : à l'aide du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine

Le coefficient directeur vaut $\frac{2}{3}$ et l'ordonnée à l'origine vaut -1.

On place $A(0; -1)$ dont l'ordonnée est l'ordonnée à l'origine -1, puis, à partir du point A, on construit la pente de la droite en décalant de 3 unités horizontalement et en montant de deux unités verticalement. On place le point le point $B(3; 1)$ puis on trace la droite (AB).

Définition : Soit f une fonction affine définie sur un ensemble D.

Pour tous nombres x_1 et x_2 distincts de D, on appelle **taux d'accroissement** de f entre les valeurs x_1 et x_2 le quotient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Propriété : Soit f une fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels. Pour tous nombres réels x_1 et x_2 distincts, le taux d'accroissement de la fonction affine est **constant** et égal au coefficient directeur a .

Remarque : Cette propriété permet de pouvoir calculer le coefficient directeur d'une fonction affine à partir des images de deux valeurs distinctes et donc d'en déduire l'expression de f .

Exemple : Soit f une fonction affine telle que $f(3) = 2$ et $f(8) = 12$.

Le taux d'accroissement entre 3 et 8 est $\frac{f(8) - f(3)}{8 - 3} = \frac{12 - 2}{5} = \frac{10}{5} = 2$ donc $a = 2$ et donc

$$f(x) = 2x + b$$

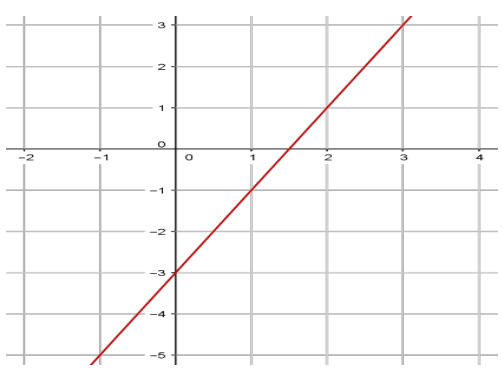
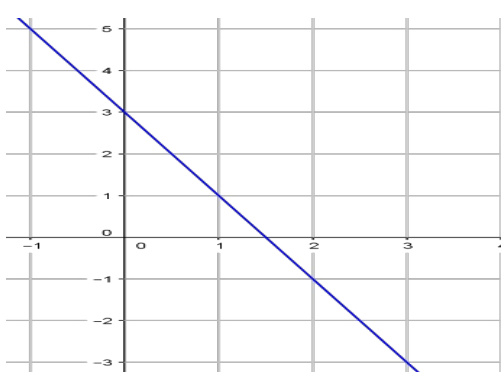
On peut alors en déduire b en résolvant une équation en utilisant par exemple que $f(3) = 2$, ainsi $2 \times 3 + b = 2$ donc $b = 2 - 6 = -4$ et donc $f(x) = 2x - 4$.

2. Sens de variations et signes d'une fonction affine

Propriété : Soient a et b deux nombres réels tels que et f la fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x)=ax+b$.

- Si $a > 0$ alors f est **croissante** sur \mathbb{R}
- Si $a < 0$ alors f est **décroissante** sur \mathbb{R}

Exemples

| Fonction croissante | Fonction décroissante |
|--|--|
|  |  |
| <p>$f(x)=2x-3$ est affine, $a=2 > 0$ et f est bien croissante.</p> | <p>$g(x)=-2x+3$ est affine, $a=-2 < 0$ et g est décroissante</p> |

Remarque : On parle alors de croissance ou de décroissance linéaire.

Si $a=0$ alors la fonction affine est constante et n'est donc ni croissante ni décroissante.

Propriété : Soient a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$ et f la fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x)=ax+b$. La fonction affine s'annule et change de signe **une et une seule fois** dans son ensemble de définition en $x = \frac{-b}{a}$ et le signe de la fonction affine dépend **du signe de a** .

On peut résumer le signe de la fonction affine dans les tableaux de signes ci-dessous :

| $a > 0$ | | | $a < 0$ | | |
|----------|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{-b}{a}$ | $-\infty$ | $\frac{-b}{a}$ | $+\infty$ |
| $ax + b$ | - | 0 | + | 0 | - |

Remarque : Dans les deux cas, on a le signe contraire de a «avant» $\frac{-b}{a}$ et le signe de a «après» $\frac{-b}{a}$.

Exemple: Signe de $2x-8$ sur \mathbb{R}

$$2x-8=0 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{2}=4 \text{ et } 2x-8 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{2} \Leftrightarrow x \geq 4$$

On déduit le tableau de signes de $2x-8$ sur \mathbb{R} :

| | | | |
|--------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 4 | $+\infty$ |
| $2x-8$ | $-$ | 0 | $+$ |

Exemple : Signe de $-3x-7$ sur \mathbb{R}

$$-3x-7=0 \Leftrightarrow -3x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{-3} \Leftrightarrow x=-\frac{7}{3} \text{ et } -3x-7 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{-3} \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{3}$$

On déduit le tableau de signes de $-3x-7$ sur \mathbb{R} :

| | | | |
|---------|-----------|----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{7}{3}$ | $+\infty$ |
| $-3x-7$ | $+$ | 0 | $-$ |

II. Les suites arithmétiques

1. Définition d'une suite numérique

Définition : Une suite u de nombres réels est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} dont la variable est un entier naturel. L'image par u de n est noté $u(n)$ ou encore u_n qui se lit « u indice n ». Cette suite est aussi notée $(u(n))$ ou (u_n) .

u_n est le terme général de la suite ou terme d'indice n .

Exemples :

1. La suite des nombres entiers impairs : $1 ; 3 ; 5 ; 7 ; \dots$
2. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$.
On a alors $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^2 + 1 = 2$, $u_9 = 9^2 + 1 = 82$.

Remarques :

- Attention, on ne peut pas toujours confondre le rang et l'indice des termes d'une suite. En effet, u_n n'est pas toujours le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite, cela dépend de l'indice du premier terme. Par exemple, si u_0 est le premier terme alors u_1 est le deuxième terme et donc u_n est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme.
- u_{n-1} est le terme précédant u_n , u_{n+1} est le terme suivant u_n . On peut d'ailleurs, pour définir une suite, donner son premier terme et une relation de récurrence c'est à dire une relation qui permet de calculer u_{n+1} à partir de u_n . Dans ce cas là, on sera obligé, pour calculer un terme, d'avoir calculé tous les termes précédents. On dit que l'on calcule les termes de la suite de proche en proche ou par une relation de récurrence.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=2u_n+n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On déduit :

$$u_1=2u_0+0^2=2 \times 3+0=6$$

$$u_2=2u_1+1^2=2 \times 6+1=13$$

$$u_3=2u_2+2^2=2 \times 13+4=30$$

$$u_4=2u_3+3^2=2 \times 30+9=69$$

Pour calculer u_6 , il faudra d'abord calculer u_5

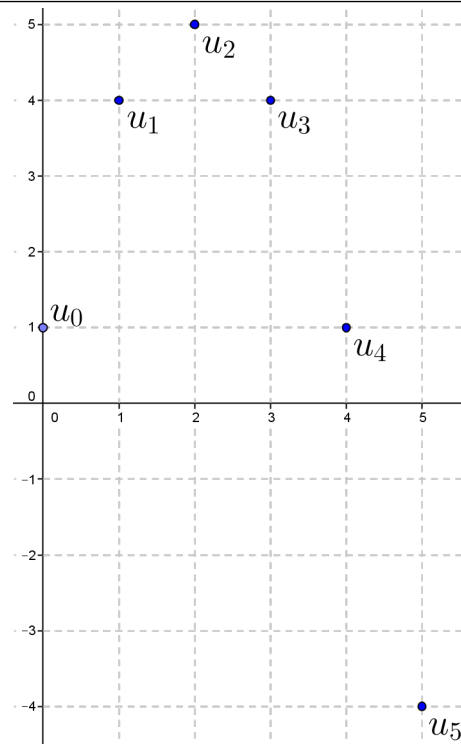
Attention : il ne faut pas confondre u_{n+1} qui est le terme d'indice $n+1$ avec u_n+1 qui est le terme d'indice n auquel on rajoute 1.

Définition : La représentation graphique d'une suite numérique est formée des points du plan de coordonnées $A_n(n; u_n)$ avec les valeurs de n pour lesquelles la suite est définie.

Exemple : Si l'on reprend la suite définie par

$u_n=-n^2+4n+1$, on obtient la représentation graphique ci-contre. Les points $A_0(0; u_0), A_1(1; u_1), \dots, A_5(5; u_5)$ sont situées sur la courbe d'équation $y=-x^2+4x+1$.

Remarque : Une suite est une fonction particulière, en effet, la variable n est un entier naturel qui prend donc des valeurs isolées, sa représentation graphique n'est donc pas une courbe mais un nuage de points. On parle alors d'un **phénomène discret** par opposition au **phénomène continu** que décrit une fonction où la variable prend ses valeurs dans un intervalle de \mathbb{R} .



2. Un cas particulier : la suite arithmétique

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en **ajoutant** au précédent un **même nombre**. Ainsi, il existe un réel r tel que, pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) .

Exemples :

1. Soit (a_n) la suite arithmétique de premier terme $a_0 = -3$ et de raison $r = 2$.
On a alors : $a_1 = a_0 + 2 = -3 + 2 = -1$, $a_2 = a_1 + 2 = -1 + 2 = 1$, $a_3 = a_2 + 2 = 1 + 2 = 3$
A chaque étape, on ajoute 2 pour calculer le terme suivant.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 7 - 4n$.
 $u_0 = 7$, $u_1 = 3$ et $u_2 = -1$ donc $u_1 = u_0 + (-4)$ et $u_2 = u_1 + (-4)$
La suite (u_n) semble arithmétique. Pour le prouver, il faut le justifier pour tout les entiers n .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 7 - 4(n+1) - (7 - 4n) = 7 - 4n - 4 - 7 + 4n = -4$ donc
 $u_{n+1} = u_n + (-4)$ donc la suite (u_n) est donc une suite arithmétique de terme initial
 $u_0 = 7$ et de raison $r = -4$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = n^2 - 1$.
 $v_0 = -1$, $v_1 = 0$ et $v_2 = 3$ donc $v_1 = v_0 + 1$ et $v_2 = v_1 + 3$.
 $1 \neq 3$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Pour justifier que la suite n'est pas arithmétique, il suffit de trouver trois termes consécutifs pour lesquels cela ne fonctionnent pas.

Remarque : Pour prouver qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à démontrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est égale à une constante pour tout entier n .

Propriété : Terme général d'une suite arithmétique

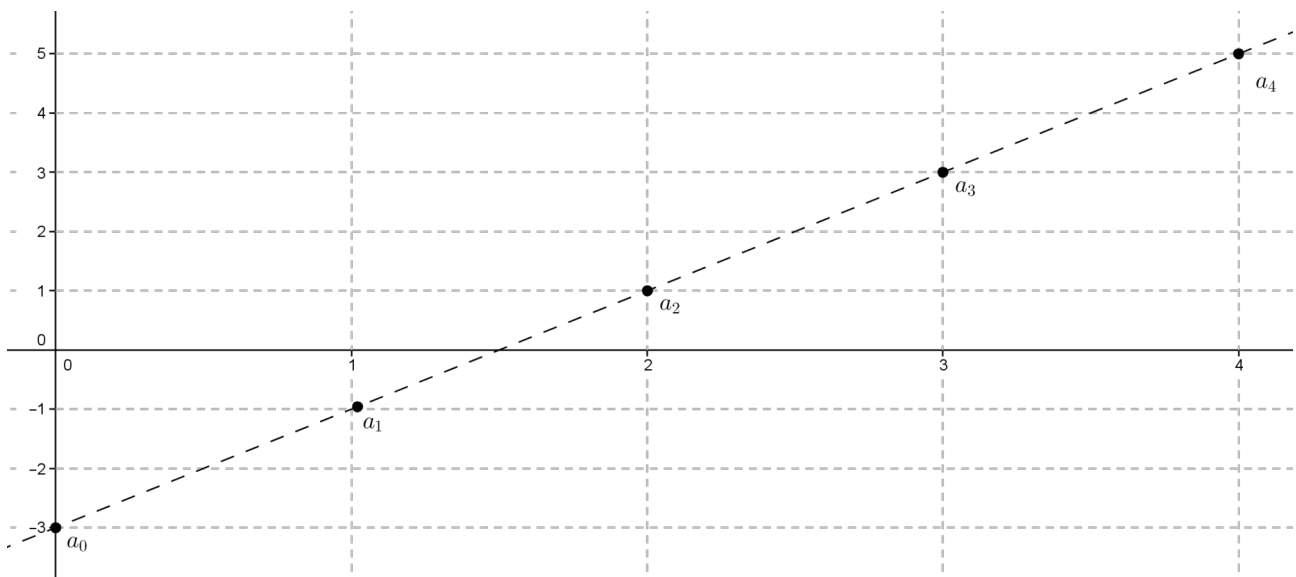
On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r .

On a alors, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$, $u_n = u_1 + (n-1)r$, plus généralement, pour tout entiers p et k , $u_p = u_k + (p-k)r$.

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 7.
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 5 + 7n$ ou encore $u_n = u_4 + (n-4) \times 7$

Remarque : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r et f la fonction affine définie par $f(x) = u_0 + rx$. On a, pour tout entier n , $u_n = f(n)$ donc les points représentant cette suite appartiennent à la courbe représentative de f qui est une droite donc les points représentant cette suite sont alignés. Pour une suite arithmétique, on parle de croissance linéaire.

Exemple : Soit (a_n) la suite arithmétique de premier terme $a_0 = -3$ et de raison $r = 2$.



Tous les termes de la suite se situent sur la droite qui représente la fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3 + 2x$

Propriété : Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Son sens de variation est donné par le **signe de r** .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est **croissante**, autrement dit, chaque terme est supérieur au précédent.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, autrement dit, chaque terme est égal au précédent.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est **décroissante**, autrement dit, chaque terme est inférieur au précédent.

Définition : La croissance d'un phénomène est **linéaire** lorsque le taux d'accroissement de la suite ou de la fonction qui la caractérise est constant.

- Si le phénomène est discret, une croissance linéaire peut-être modélisée par une suite arithmétique
- Si le phénomène est continu, une croissance linéaire peut-être modélisée par une fonction affine.

Exemples :

- Le calcul annuel des intérêts d'un capital est un phénomène discret dont la variable est un nombre entier d'années.
- La position en fonction du temps d'un cycliste se déplaçant sur un axe est un phénomène continu dont la variable est un temps situé dans un intervalle de \mathbb{R} .