Exercice 1 :
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1=\overline{\left(\frac{1}{2i}\right)} \qquad z_2=\overline{\left(\frac{1}{5-2i}\right)} \qquad z_3=\overline{\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2+3\,\mathrm{i}}\right)} \qquad z_4=\overline{\left(\frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}\right)}$$

Corrigé

$$z_1=\overline{\left(\frac{1}{2i}\right)}=\frac{\overline{1}}{\overline{2i}}=\frac{1}{-2i}=\frac{i}{2}=\frac{1}{2}i$$

$$z_2=\overline{\left(\frac{1}{5-2i}\right)}=\frac{\overline{1}}{\overline{5-2i}}=\frac{1}{5+2i}=\frac{5-2i}{5^2+2^2}=\frac{5}{29}-\frac{2}{29}i$$

$$z_3=\overline{\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2+3\,\mathrm{i}}\right)}=\frac{\overline{1-i}}{\overline{2+3i}}=\frac{1+i}{2-3i}=\frac{(1+i)(2+3i)}{2^2+(-3)^2}=\frac{-1+5i}{13}=\frac{-1}{13}+\frac{5}{13}i$$

$$z_4=\overline{\left(\frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}\right)}=\frac{\overline{1+i\sqrt{2}}}{\overline{1-i\sqrt{2}}}=\frac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}=\frac{(1-i\sqrt{2})^2}{1^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{(1^2-2i\sqrt{2}+(i\sqrt{2})^2)}{1^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{-1-2i\sqrt{2}}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

Exercice 2 :
Déterminer la forme algébrique des conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_1=7-\left(3+\frac{5}{3}\mathrm{i}\right) \qquad z_2=(3-5\mathrm{i})+\sqrt{2} \qquad z_3=\frac{3}{2}+3\mathrm{i}+(1-\mathrm{i}) \qquad z_4=(5-\mathrm{i})(\sqrt{2}+3\mathrm{i})$$

Corrigé

$$\overline{z_1}=\overline{\left(7-\left(3+\frac{5}{3}i\right)\right)}=\overline{7}-\overline{\left(3+\frac{5}{3}i\right)}=7-\left(3-\frac{5}{3}i\right)=4+\frac{5}{3}i$$

$$\overline{z_2}=\overline{(3-5i)+\sqrt{2}}=\overline{(3+\sqrt{2})-5i}=(3+\sqrt{2})+5i$$

$$\overline{z_3}=\overline{\left(\frac{3}{2}+3i+(1-i)\right)}=\overline{\frac{5}{2}+2i}=\frac{5}{2}-2i$$

$$\overline{z_4}=\overline{(5-i)(\sqrt{2}+3i)}=(\overline{5-i})(\overline{\sqrt{2}+3i})=(5+i)(\sqrt{2}-3i)=(5\sqrt{2}+3)+(\sqrt{2}-15)i$$

Exercice 3 :

Sans utiliser la forme algébrique, montrer que pour tout nombre complexe z, $z-\overline{z}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ est un nombre imaginaire pur.

Corrigé

$$z-\overline{z}+\frac{3}{2}i=2i\,\mathrm{Im}(z)+\frac{3}{2}i=\left(2\,\mathrm{Im}(z)+\frac{3}{2}\right)i\in i\mathbb{R}$$

Exercice 4 :

Soit $z\in\mathbb{C}$.

a. On pose $Z=z+2\overline{z}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre Z soit imaginaire pur.

b. On pose $Z=\frac{z+1}{\overline{z}+1}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre Z soit réel.

Corrigé

Soit $z\in\mathbb{C}$.

a.

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=-\overline{Z}$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z+2\overline{z}=-\left(\overline{z+2\overline{z}}\right)$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z+2\overline{z}=-\left(\overline{z}+2z\right)$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z+2\overline{z}=-\overline{z}-2z$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z+\overline{z}+2\overline{z}+2z=0$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow 3\left(z+\overline{z}\right)=0$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z+\overline{z}=0$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\overline{z}$

$Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

Conclusion : $S=i\mathbb{R}$

b. $Z=\frac{z+1}{\overline{z}+1}$ est défini pour les nombres complexes z tels que $\overline{z}+1\neq 0$.

Or, $\overline{z}+1=0\Leftrightarrow\overline{z}=-1\Leftrightarrow z=-1$ donc Z est défini pour $z\in\mathbb{C}\backslash\{-1\}$.

Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\{-1\}$. On a :

$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=\overline{Z}$

$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z+1}{\overline{z}+1}=\overline{\left(\frac{z+1}{\overline{z}+1}\right)}$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z+1}{\bar{z}+1} = \frac{\bar{z}+1}{z+1}$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z+1)^2 = (\bar{z}+1)^2$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z+1)^2 - (\bar{z}+1)^2 = 0$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [(z+1)-(\bar{z}+1)][(z+1)+(\bar{z}+1)] = 0$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}+2) = 0$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z-\bar{z} = 0 \text{ ou } z+\bar{z}+2 = 0$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ ou } z+\bar{z} = -2$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } 2\mathrm{Re}(z) = -2$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathrm{Re}(z) = -1$$
$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } z = -1+ib \text{ avec } b \in \mathbb{R}$$

Or, $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1\}$ donc $S = \mathbb{R} \backslash \{-1\} \cup \{-1+ib, b \in \mathbb{R}^*\}$.

Exercice 5 :
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

a. $-2\mathrm{i}z = 3z+1$ **b.** $(3+\mathrm{i})\bar{z}+2z = 2\mathrm{i}$ **c.** $\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}} = 2+\mathrm{i}$ **d.** $\frac{2\mathrm{i}\bar{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}} = 3$

Corrigé

a. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$-2\mathrm{i}z = 3z+1 \Leftrightarrow -2iz-3z = 1$$
$$-2\mathrm{i}z = 3z+1 \Leftrightarrow -2iz-3z = 1$$
$$-2\mathrm{i}z = 3z+1 \Leftrightarrow (-2i-3)z = 1$$
$$-2\mathrm{i}z = 3z+1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{(-3-2i)} = \frac{(-3+2i)}{(-3)^2+(-2)^2} = -\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$$

Conclusion : $S = \{-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i\}$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x+iy$. On a $\bar{z} = x-iy$. On déduit :

$$(3+\mathrm{i})\bar{z}+2z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow (3+i)(x-iy)+2(x+iy) = 2i$$
$$(3+\mathrm{i})\bar{z}+2z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow 3x-3iy+ix+y+2x+2iy = 2i$$
$$(3+\mathrm{i})\bar{z}+2z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow (5x+y)+i(x-y) = 2i$$
$$(3+\mathrm{i})\bar{z}+2z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+y = 0 \\ x-y = 2 \end{cases}$$
$$(3+\mathrm{i})\bar{z}+2z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5x \\ x+5x = 2 \end{cases}$$
$$(3+\mathrm{i})\bar{z}+2z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5x \\ 6x = 2 \end{cases}$$

$$(3+\mathrm{i})\overline{z}+2z=2\mathrm{i}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-5x \\ x=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$(3+\mathrm{i})\overline{z}+2z=2\mathrm{i}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\dfrac{-5}{3} \\ x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Conclusion : $S=\{\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\}$.

c. L'équation $\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$ est définie pour les nombres complexes z tels que $z-3i\neq0$.

L'équation $\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$ est par conséquent définie sur $\mathbb{C}\setminus\{3\mathrm{i}\}$.

Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{3\mathrm{i}\}$. On a :

$$\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}\Leftrightarrow iz+1=(2+i)(z-3i)$$
$$\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}\Leftrightarrow iz+1=2z-6i+iz+3$$
$$\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}\Leftrightarrow 1=2z-6i+3$$
$$\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}\Leftrightarrow 2z=-2+6i$$
$$\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}\Leftrightarrow z=-1+3i\neq3i$$

Conclusion : $S=\{-1+3i\}$

d. L'équation $\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3$ est définie pour les nombres complexes z tels que $z-1-i\neq0$.

L'équation $\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3$ est par conséquent définie sur $\mathbb{C}\setminus\{1+\mathrm{i}\}$.

Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1+\mathrm{i}\}$. Posons $z=x+iy$. On a $\overline{z}=x-iy$. On déduit :

$$\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3\Leftrightarrow 2i\overline{z}+i=3(z-1-i)$$
$$\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3\Leftrightarrow 2i\overline{z}+i=3z-3-3i$$
$$\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3\Leftrightarrow 2i\overline{z}-3z=-3-4i$$
$$\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3\Leftrightarrow 2i(x-iy)-3(x+iy)=-3-4i$$
$$\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3\Leftrightarrow 2ix+2y-3x-3iy=-3-4i$$
$$\frac{2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3\Leftrightarrow(-3x+2y)+i(2x-3y)=-3-4i$$

$$\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y=-3 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$$

$$\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+4y=-6 \\ 6x-9y=-12 \end{cases}$$

$$\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y=-3 \\ -5y=-18 \end{cases}$$

$$\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y=-3 \\ y=\frac{18}{5} \end{cases}$$

$$\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=-3-\frac{36}{5} \\ y=\frac{18}{5} \end{cases}$$

$$\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{12}{5}=\frac{17}{5} \\ y=\frac{18}{5} \end{cases}$$

$$\frac{2i\bar{z}+i}{z-1-i}=3 \Leftrightarrow z=\frac{17}{5}+\frac{18}{5}i \neq 1+i$$

Conclusion : $S=\{\frac{17}{5}+\frac{18}{5}i\}$.

Exercice 6 – Vrai ou Faux ?

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ est l'inverse de $1+i$.
2. $\frac{1}{1+i}$ et $\frac{1}{1-i}$ ont la même partie réelle.
3. $\frac{4+2i}{1-i}$ est le conjugué de $1-3i$.
4. $(1+i)^3$ est le conjugué de $\frac{4}{1+i}$.
5. Le conjugué de $(1+2i)(2i+3)$ est $(1-2i)(2i-3)$.
6. Si $z_1=\frac{1+i}{1-i}$ et $z_2=\frac{1-i}{1+i}$ alors $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ et $z_1-z_2\in i\mathbb{R}$.

Corrigé

1. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1+i)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}=1$ donc la proposition est **Vraie.**

2. $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{1^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ donc la proposition est **Vraie.**

3. $\overline{\left(\frac{4+2i}{1-i}\right)}=\frac{4-2i}{1+i}=\frac{(4-2i)(1-i)}{1^2+1^2}=\frac{4-4i-2i-2}{2}=\frac{2-6i}{2}=1-3i$
   donc la proposition est **Vraie.**

4. $(1+i)^3=1^3+3\times1^2\times i+3\times1\times i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$
   Or, $\frac{4}{1+i}=\frac{4(1-i)}{1^2+1^2}=\frac{4-4i}{2}=2-2i\neq-2+2i$ donc la proposition est **Fausse.**

5. $\overline{(1+2i)(2i+3)}=\overline{1+2i}\ \overline{2i+3}=(1-2i)(3-2i)\neq(1-2i)(2i-3)$
   donc la proposition est **Fausse.**

6. $z_1=\frac{1+i}{1-i}$ et $z_2=\frac{1-i}{1+i}$ donc $\overline{z_1}=\frac{\overline{1+i}}{\overline{1-i}}=\frac{1-i}{1+i}=z_2$
   donc $z_1+z_2=z_1+\overline{z_1}=2\,\mathrm{Re}(z_1)\in\mathbb{R}$ et $z_1-z_2=z_1-\overline{z_1}=2i\,\mathrm{Im}(z_1)\in i\mathbb{R}$
   donc la proposition est **Vraie.**

Exercice 7

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. En justifiant votre réponse, indiquer, pour chacun des cas suivants, s'il s'agit d'un nombre réel ou d'un imaginaire pur.

$z_1 = z + \overline{z}$	$z_2 = z - \overline{z}$	$z_3 = z^2 + (\overline{z})^2$	$z_4 = z^2 - (\overline{z})^2$
$z_5 = \dfrac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}$ avec $z \neq \overline{z}$	$z_6 = \dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}$ avec $z \neq \overline{z}$	$z_7 = \dfrac{z^2+(\overline{z})^2}{z \times \overline{z}}$	$z_8 = \dfrac{z^2-(\overline{z})^2}{z \times \overline{z}}$

Corrigé

$$z_1 = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

$$z_2 = z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z) \in i\mathbb{R}$$

$$z_3 = z^2 + (\overline{z})^2 = (z^2) + \overline{(z^2)} = 2\,\mathrm{Re}(z^2) \in \mathbb{R}$$

$$z_4 = z^2 - (\overline{z})^2 = (z^2) - \overline{(z^2)} = 2i\,\mathrm{Im}(z^2) \in i\mathbb{R}$$

$$z_5 = \frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}} = \frac{2\,\mathrm{Re}(z)}{2i\,\mathrm{Im}(z)} = -\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}\right) i \in i\mathbb{R}$$

$$z_6 = \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}} = \frac{2i\,\mathrm{Im}(z)}{2\,\mathrm{Re}(z)} = i\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) \in i\mathbb{R}$$

$$z_7 = \frac{z^2+(\overline{z})^2}{z \times \overline{z}} = \frac{2\,\mathrm{Re}(z^2)}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$$

$$z_8 = \frac{z^2-(\overline{z})^2}{z \times \overline{z}} = \frac{2i\,\mathrm{Im}(z^2)}{a^2+b^2} = i\left(\frac{2\,\mathrm{Im}(z^2)}{a^2+b^2}\right) \in i\mathbb{R}$$

Exercice 8

1. Montrer que, pour tout nombre complexe non nul z , le nombre complexe $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.
2. Montrer que, pour tout nombre complexe non nul z , le nombre complexe $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

Corrigé

1. $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{z}+\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\in\mathbb{R}$

2. $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{z}-\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=2i\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\in i\mathbb{R}$

Exercice 9

Soient deux nombres complexes $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ avec $(a,b,a',b')\in\mathbb{R}^4$ tels que $1+zz'\neq 0$. On suppsoe que $a^2+b^2=1$ et $a'^2+b'^2=1$.

Montrer que, le nombre complexe $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est un nombre réel.

Corrigé

Posons $Z=\frac{z+z'}{1+zz'}$. $Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Z-\overline{Z}=0$ .Or,

$$Z-\overline{Z}=\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)-\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)}$$

$$Z-\overline{Z}=\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)-\left(\frac{\overline{z}+\overline{z}'}{1+\overline{zz}'}\right)$$

$$Z-\overline{Z}=\frac{(z+z')(1+\overline{zz'})-(\overline{z}+\overline{z}')(1+zz')}{(1+zz')(1+\overline{zz'})}$$

$$Z-\overline{Z}=\frac{z+z\overline{z}\,\overline{z}'+z'+\overline{z}z'\overline{z}'-\overline{z}-z\overline{z}z'-\overline{z}'-zz'\overline{z}'}{(1+zz')(1+\overline{zz'})}$$

$$Z-\overline{Z}=\frac{z+(a^2+b^2)\overline{z}'+z'+(a'^2+b'^2)\overline{z}-\overline{z}-(a^2+b^2)z'-\overline{z}'-(a'^2+b'^2)z}{(1+zz')(1+\overline{zz'})}$$

$$Z-\overline{Z}=\frac{z+\overline{z}'+z'+\overline{z}-\overline{z}-z'-\overline{z}'-z}{(1+zz')(1+\overline{zz'})}$$ car $a^2+b^2=1$ et $a'^2+b'^2=1$

$$Z-\overline{Z}=\frac{0}{(1+zz')(1+\overline{zz'})}=0$$

Conclusion : $Z=\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes suivants :

$$(S):\begin{cases}\frac{1}{2}z_1+z_2=2\\ \frac{1}{2}\overline{z_1}+2\overline{z_2}=0\end{cases}$$

$$(S):\begin{cases}6z_1-3z_2=12+i\\ 3\overline{z_1}-\overline{z_2}=6\end{cases}$$

Corrigé

$$(S):\begin{cases}\frac{1}{2}z_1+z_2=2\\ \frac{1}{2}\overline{z_1}+2\overline{z_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}\frac{1}{2}z_1+z_2=2\\ \overline{\frac{1}{2}\overline{z_1}+2\overline{z_2}}=0\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}\frac{1}{2}z_1+z_2=2\\ \frac{1}{2}z_1+2z_2=0\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_2=2-\frac{1}{2}z_1\\ \frac{1}{2}z_1+2(2-\frac{1}{2}z_1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_2=2-\frac{1}{2}z_1\\ \frac{1}{2}z_1+2(2-\frac{1}{2}z_1)=0\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_2=2-\frac{1}{2}z_1\\ \frac{1}{2}z_1+4-z_1=0\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_2=2-\frac{1}{2}z_1\\ 4-\frac{1}{2}z_1=0\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_2=2-\frac{1}{2}z_1\\ z_1=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(S):\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_2=2-\frac{1}{2}\times 8\\ z_1=8\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_2=-2\\ z_1=8\end{cases}$$

Conclsuion : $S=\{\ (8;-2)\}$.

$$(S):\begin{cases}6z_1-3z_2=12+i\\ 3\overline{z_1}-\overline{z_2}=6\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}6z_1-3z_2=12+i\\ \overline{3\overline{z_1}-\overline{z_2}}=6\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}6z_1-3z_2=12+i\\ 3z_1-z_2=6\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}6z_1-3z_2=12+i\\ z_2=3z_1-6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(S):\begin{cases}6z_1-3(3z_1-6)=12+i\\ z_2=3z_1-6\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}6z_1-9z_1+18=12+i\\ z_2=3z_1-6\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}-3z_1=-6+i\\ z_2=3z_1-6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_1=2-\frac{1}{3}i\\ z_2=3(2-\frac{1}{3}i)-6\end{cases}\Leftrightarrow(S):\begin{cases}z_1=2-\frac{1}{3}i\\ z_2=-i\end{cases}$$

Conclsuion : $S=\{\ (2-\frac{1}{3}i;-i)\}$.

Exercice 11
Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes.

$z=\overline{z}$	$z=-\overline{z}$	$z=i\,\overline{z}$	$z=-i\,\overline{z}$	$z^2=z\times\overline{z}$

Corrigé

$z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

$z=-\overline{z}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

$z=i\,\overline{z}\Leftrightarrow x+iy=i(x-iy)\Leftrightarrow x+iy=y+ix\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow z=x(1+i)\text{avec}\,x\in\mathbb{R}$

$z=-i\,\overline{z}\Leftrightarrow x+iy=-i(x-iy)\Leftrightarrow x+iy=-y-ix\Leftrightarrow x=-y\Leftrightarrow z=x(1-i)\text{avec}\,x\in\mathbb{R}$

$z^2=z\times\overline{z}\Leftrightarrow z^2-z\,\overline{z}=0\Leftrightarrow z(z-\overline{z})=0\Leftrightarrow z=0\text{ ou }z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$