Exercice 1 :
Déterminer les conjugués des nombres complexes :

$z_1=3-2i \qquad z_2=5 \qquad z_3=4i \qquad z_4=9i-5$

Correction

$\bar{z}_1=3+2i \qquad \bar{z}_2=5 \qquad \bar{z}_3=-4i \qquad \bar{z}_4=-9i-5$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$2\bar{z}+5-2i=4+i+3\bar{z} \qquad 2z+i\bar{z}=5-2i$

Correction

$$2\bar{z}+5-2i=4+i+3\bar{z}\Leftrightarrow 5-2i-4-i=\bar{z}\Leftrightarrow \bar{z}=1-3i\Leftrightarrow z=1+3i$$

Conclusion : $S=\{1+3i\}$

$$2z+i\bar{z}=5-2i\Leftrightarrow 2(x+iy)+i(x-iy)=5-2i\Leftrightarrow 2x+2iy+ix+y=5-2i$$
$$2z+i\bar{z}=5-2i\Leftrightarrow (2x+y)+i(x+2y)=5-2i\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\ x+2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x\\ x+2(5-2x)=-2\end{cases}$$
$$2z+i\bar{z}=5-2i\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x\\ x+10-4x=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x\\ -3x+10=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x\\ -3x=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2\times 4=-3\\ x=4\end{cases}$$

Conclusion : $S=\{4-3i\}$

Exercice 3 : Calculer $\frac{1}{i}$ et $\frac{1}{1+2i}$.

Correction

$$\frac{1}{i}=\frac{1\times(-i)}{-i^2}=\frac{-i}{1}=-i \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{1^2+2^2}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

Exercice 4 : Calculer $\frac{1+i}{2i-3}$.

Correction

$$\frac{1+i}{2i-3}=\frac{(1+i)(-3-2i)}{(-3)^2+2^2}=\frac{-3-2i}{13}=-\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(1+2i)z=3+i$ **2**. $(3+i)\overline{z}-2+4i=0$ **3**. $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$

Correction

Dans la suite, on posera , si besoin, $z=x+iy$ et $\overline{z}=x-iy$.

1. $(1+2i)z=3+i \Leftrightarrow z=\frac{(3+i)}{(1+2i)}=\frac{(3+i)(1-2i)}{1^2+2^2}=\frac{3-6i+i+2}{5}=\frac{5-5i}{5}=1-i$

Conclusion : $S=\{1-i\}$

2. $(3+i)\overline{z}-2+4i=0 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{-2+4i}{3+i} \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{(-2+4i)(3-i)}{3^2+1^2}$

$(3+i)\overline{z}-2+4i=0 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{-6+2i+12i+4}{10} \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{-2+14i}{10} \Leftrightarrow \overline{z}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

$(3+i)\overline{z}-2+4i=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

Conclusion : $S=\{-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i\}$

3. $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i \Leftrightarrow (1+i)(x+iy)+(3-i)(x-iy)=2-6i$

$\Leftrightarrow (1+i)x+(1+i)iy+(3-i)x-(3-i)iy=2-6i$

$\Leftrightarrow x+ix+iy-y+3x-xi-3yi-y=2-6i$

$\Leftrightarrow (4x-2y)+i(-2y)=2-6i$

$\Leftrightarrow (4x-2y)+i(-2y)=2-6i \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=2 \\ -2y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=2 \\ y=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2\times 3=2 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-6=2 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Conclusion : $S=\{2+3i\}$

Exercice 6 : Calculer $z_1=\overline{(1-2i)(2+3i)}, z_2=\overline{(\frac{i}{1+i})}$ et $z_3=\overline{(i^3)}$.

Correction

$$z_1=\overline{(1-2i)(2+3i)}=\overline{(1-2i)}\ \overline{(2+3i)}=(1+2i)(2-3i)=2-3i+4i+6=8+i$$

$$z_2=\overline{(\frac{i}{1+i})}=\frac{\bar{i}}{\overline{1+i}}=\frac{-i}{1-i}=\frac{-i(1+i)}{1^2+(-1)^2}=\frac{-i+1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_3=\overline{(i^3)}=\bar{i}^3=(-i)^3=-i^3=i$$

Exercice 7 : Calculer le conjugué de $z=\frac{(3+2i)(1-i)}{(1+2i)^2}$.

Correction

$$\bar{z}=\overline{\frac{(3+2i)(1-i)}{(1+2i)^2}}=\frac{\overline{(3+2i)(1-i)}}{\overline{(1+2i)^2}}=\frac{(3-2i)(1+i)}{(1-2i)^2}$$

$$\bar{z}=\frac{3+3i-2i+2}{1-4i-4}=\frac{5+i}{-3-4i}=\frac{(5+i)(-3+4i)}{(-3)^2+(-4)^2}=\frac{-15+20i-3i-4}{25}=\frac{-19+17i}{25}=-\frac{19}{25}=+\frac{17}{25}i$$

Exercice 8 : A l'aide des propriétés sur les conjugués, démontrer que $z+z'$ est un réel et $z-z'$ est un imaginaire pur avec $z=\frac{-2+5i}{3-2i}$ et $z'=\frac{-2-5i}{3+2i}$.

Correction

Posons $z_1=-2+5i$ et $z_2=3-2i$. On a alors $z=\frac{z_1}{z_2}$ et $z'=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$. On déduit que :

$$z+z'=2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\in\mathbb{R} \text{ et } z+z'=2i\,\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\in i\mathbb{R}$$