Exercice 1 :
Déterminer la partie réelle et imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=2$	$z_2=-3i$	$z_3=i-3$	$z_4=z_1+z_3$	$z_5=z_2\times z_3$

Correction

$z_1=2\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1)=2 \text{ et } \mathrm{Im}(z_1)=0$
$z_2=-3i\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_2)=0 \text{ et } \mathrm{Im}(z_2)=-3$
$z_3=i-3=-3+i\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_3)=-3 \text{ et } \mathrm{Im}(z_3)=1$
$z_4=z_1+z_3=2+i-3=-1+i\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_4)=-1 \text{ et } \mathrm{Im}(z_4)=1$
$z_5=z_2\times z_3=-3i\times(i-3)=-3i^2+9i=3+9i\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_5)=3 \text{ et } \mathrm{Im}(z_5)=9$

Exercice 2 :
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité :

$a+3i=2+i(1-b)$	$2+a+i(b^2+b)=i(2b-ia^2)+3a+3$

Correction

$$a+3i=2+i(1-b)\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ 1-b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=-2\end{cases}$$

$$2+a+i(b^2+b)=i(2b-ia^2)+3a+3\Leftrightarrow(2+a)+i(b^2+b)=2ib+a^2+3a+3$$
$$2+a+i(b^2+b)=i(2b-ia^2)+3a+3\Leftrightarrow(2+a)+i(b^2+b)=(a^2+3a+3)+2ib$$
$$2+a+i(b^2+b)=i(2b-ia^2)+3a+3\Leftrightarrow\begin{cases} a^2+3a+3=2+a \\ b^2+b=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2+2a+1=0 \\ b^2-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (a+1)^2=0 \\ b(b-1)=0\end{cases}$$
$$2+a+i(b^2+b)=i(2b-ia^2)+3a+3\Leftrightarrow\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \text{ ou } b=1\end{cases}$$

Conclusion : S={(-1;0) ; (-1;1)}

Exercice 3 :

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=(3-2i)-(3+2i)$	$z_2=2(1+i)+i(2i-1)$	$z_3=(1+i)(3+2i)$	$z_4=(1-i)^5$

Correction

- $z_1=(3-2i)-(3+2i)=3-2i-3-2i=-4i$
- $z_2=2(1+i)+i(2i-1)=2+2i-2-i=i$
- $z_3=(1+i)(3+2i)=3+2i+3i-2=1+5i$
- $z_4=(1-i)^5=1^5-5\times1^4\times i^1+10\times1^3\times i^2-10\times1^2\times i^3+5\times1^1\times i^4-i^5$
  $z_4=(1-i)^5=1-5i-10+10i+5-i=-4+4i$

Rappel : triangle de Pascal pour n=5

n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1
	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5

Exercice 4 :

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=-(2-\frac{1}{4}i)+(\frac{1}{3}i-1)$	$z_2=(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}i)(\frac{2}{3}i-\frac{1}{4})$
$z_3=(2\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{2})$	$z_4=(i\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2})(-i\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2})$

Correction

$$z_1=-(2-\frac{1}{4}i)+(\frac{1}{3}i-1)=-2+\frac{1}{4}i+\frac{1}{3}i-1=-3+\frac{7}{12}i$$

$$z_2=(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}i)(\frac{2}{3}i-\frac{1}{4})=\frac{2}{9}i-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}-\frac{3}{16}i=\frac{-7}{12}+\frac{5}{144}i$$

$$z_3=(2\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{2})=2\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_4=(i\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2})(-i\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3}{16}+\frac{\sqrt{6}}{8}i-\frac{\sqrt{6}}{8}i+\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$$

Exercice 5 :

1. Déterminer la forme algébrique de $i^2;i^3;i^4$ et i^5 .
2. (a) Soit $k\in\mathbb{N}$. Déterminer la forme algébrique de $i^{4k};i^{4k+1};i^{4k+2}$ et i^{4k+3} .
   (b) En déduire la valeur de $Z=i^{2020}+i^{2021}+i^{2022}+i^{2023}$
3. de manière générale, pour tout entier naturel n , calculer $Z_n=i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$.

Correction

1. $i^2=-1;i^3=i^2\times i=-i;i^4=i^3\times i=-i\times i=1$ et $i^5=i^4\times i=i$

2. (a) $i^{4k}=i^{4k}=1^k=1$
   $i^{4k+1}=i^{4k}\times i^1=1\times i=i$
   $i^{4k+2}=i^{4k+1}\times i=i\times i=-1$
   $i^{4k+3}=i^{4k+2}\times i^1=-1\times i=-i$

   (b) $Z=i^{2020}+i^{2021}+i^{2022}+i^{2023}=i^{4\times 505}+i^{4\times 505+1}+i^{4\times 505+2}+i^{4\times 505+3}=1+i-1-i=0$

3. $Z_n=i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n(1+i+i^2+i^3)=i^n(1+i-1-i)=i^n\times 0=0$

Exercice 6 : En justifiant votre réponse, répondez par Vrai ou Faux aux propositions suivantes :

1. i^2 est positif.
2. Le produit de $1+i$ par $3+3i$ est égal à $6i$.
3. $z=(2i-1)^2+2(2i-1)+5$ est égal à 0.
4. $z=(2-i\sqrt{3})^2+4(2-i\sqrt{3})+7$ est égal à 0.

Correction

1. $i^2=-1<0$ donc la proposition 1 est fausse.

2. $(1+i)(3+3i)=3+3i+3i-3=6i$ donc la proposition 2 est vraie.

3. $z=(2i-1)^2+2(2i-1)+5=(2i)^2-2\times(2i)\times1+1^2+4i-2+5$
   $z=-4-4i+1+4i-2+5=0$ donc la proposition 3 est vraie.

4. $z=(2-i\sqrt{3})^2+4(2-i\sqrt{3})+7=4-4\sqrt{3}i-3+8-4\sqrt{3}i+7$
   $z=16-8\sqrt{3}i\neq0$ donc la proposition 4 est fausse.