

Exercice 1 :

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

- a. 363 par 8 b. -363 par 10 c. -121 par 23

Correction

- a. $363 = 8 \times 45 + 3$ donc $q = 45$ et $r = 3$
 b. $363 = 10 \times 36 + 3$ donc $-363 = 10 \times (-36) - 3 = 10 \times (-37 + 1) - 3 = 10 \times (-37) + 7$
 $-363 = 10 \times (-37) + 7$ donc $q = -37$ et $r = 7$
 c. $121 = 23 \times 5 + 6$ donc $-121 = 23 \times (-5) - 6 = 23 \times (-6 + 1) - 6 = 23 \times (-6) + 17$
 $-121 = 23 \times (-6) + 17$ donc $q = -6$ et $r = 17$

Exercice 2 :

Le reste de la division euclidienne de 1789 par l'entier naturel b est 497.

Déterminer les valeurs possibles de b et du quotient.

Correction

$$1789 = b \times q + 497 \text{ avec } 497 < b \text{ donc } 1789 - 497 = b \times q \text{ avec } 497 < b$$

$$\text{donc } 1292 = b \times q \text{ avec } 497 < b \text{ donc } b \text{ et } q \text{ divisent } 1292 \text{ avec } 497 < b$$

Or, $1292 = 1 \times 1292 = 2 \times 646 = 4 \times 323$ mais $323 < 497$ donc les seules valeurs possibles pour b sont 1292 ou 646. On déduit que les couples $(b; q)$ solutions sont $(1292; 1)$ et $(646; 2)$.

Exercice 3 :

Le reste de la division euclidienne de 225 par un entier naturel b est 4.

Déterminer les valeurs possibles de b .

Correction

$$225 = b \times q + 4 \text{ avec } 0 \leq 4 < b \text{ donc } 225 - 4 = b \times q \text{ avec } 4 < b \text{ donc } 221 = b \times q \text{ avec } 4 < b .$$

Or, $221 = 1 \times 221 = 13 \times 17$ donc les seules valeurs possibles pour b sont 221 ou 13 ou 17.

Exercice 4 :

n désigne un nombre entier naturel et on note $A = n(n^2 + 5)$.
 Démontrer que pour tout entier naturel n , A est divisible par 3.

Correction

$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0[3]$ ou $n \equiv 1[3]$ ou $n \equiv 2[3]$. Dressons un tableau de congruences :

$n \equiv \dots[3]$	0	1	2
$n^2 \equiv \dots[3]$	0	1	$4 \equiv 1[3]$
$(n^2 + 5) \equiv \dots[3]$	$5 \equiv 2[3]$	$6 \equiv 0[3]$	$6 \equiv 0[3]$
$A = n(n^2 + 5) \equiv \dots$	0	0	0

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A = n(n^2 + 5) \equiv 0[3]$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 3 | A$.

Exercice 5 :

1. Déterminer les entiers n tels que $n + 3 \equiv 2[5]$.
2. Quel est le plus petit entier supérieur à 100 vérifiant la condition ci-dessus ?

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, n \equiv 0[5]$ ou $n \equiv 1[5]$ ou $n \equiv 2[5]$ ou $n \equiv 3[5]$ ou $n \equiv 4[5]$

$n \equiv \dots[5]$	0	1	2	3	4
$n + 3 \equiv \dots[5]$	3	4	$5 \equiv 0[5]$	$6 \equiv 1[5]$	$7 \equiv 2[5]$

Conclusion : les entiers n tels que $n + 3 \equiv 2[5]$ sont de la forme $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2. On cherche le plus petit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > 100$.
 $n > 100 \Leftrightarrow 5k + 4 > 100 \Leftrightarrow 5k > 96 \Leftrightarrow k > 19,2$.

Conclusion : le plus petit entier n tels que $n > 100$ est donc $n = 5 \times 20 + 4 = 104$.

Exercice 6 :

- Déterminer les entiers x tels que $3x \equiv 2 [5]$
- Déterminer les entiers x tels que $2x \equiv 3 [5]$

Correction

- $\forall x \in \mathbb{Z}, x \equiv 0 [5] \text{ ou } x \equiv 1 [5] \text{ ou } x \equiv 2 [5] \text{ ou } x \equiv 3 [5] \text{ ou } x \equiv 4 [5]$ 4

$x \equiv \dots [5]$	0	1	2	3	4
$3x \equiv \dots [5]$	0	3	$6 \equiv 1 [5]$	$9 \equiv 4 [5]$	$12 \equiv 2 [5]$
$2x \equiv \dots [5]$	0	2	4	$6 \equiv 1 [5]$	$8 \equiv 3 [5]$

Conclusion :

- les entiers x tel que $3x \equiv 2 [5]$ sont de la forme $x = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- les entiers x tels que $2x \equiv 3 [5]$ sont de la forme $x = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 7 :

Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 des nombres suivants : 57^{2018} , 83^{2019} et 2018^{2018} .

Correction

- $57 = 7 \times 8 + 1$ donc $57 \equiv 1 [7]$ donc $57^{2018} \equiv 1^{2018} [7]$ donc $57^{2018} \equiv 1 [7]$
donc le reste de la division euclidienne de 57^{2018} par 7 vaut 1.
- $83 = 7 \times 12 - 1$ donc $83^{2019} \equiv (-1)^{2019} [7]$ donc $83^{2019} \equiv -1 [7]$ donc $83^{2019} \equiv 6 [7]$
donc le reste de la division euclidienne de 83^{2019} par 7 vaut 6.
- $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1 [7]$.
Or, $2018 = 3 \times 672 + 2$ donc $2018^{2018} = 2018^{3 \times 672 + 2} = 2^{3 \times 672} \times 2^2 = (2^3)^{672} \times 2^2$
donc $2018^{2018} \equiv 8^{672} \times 4 [7] \equiv 1^{672} \times 4 [7] \equiv 1 \times 4 [7] \equiv 4 [7]$
donc le reste de la division euclidienne de 2018^{2018} par 7 vaut 4.

Exercice 8 :

1. Établir l'implication suivante :
« Pour tout entier naturel n , si n est divisible par 6 alors $7^n \equiv 1 [9]$ »
2. Énoncer la réciproque de la propriété précédente. Cette réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $6 \mid n$ alors $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
On a $7^2 = 49 \equiv 4 [9]$ donc $7^3 \equiv 4 \times 7 [9] \equiv 28 [9] \equiv 1 [9]$.
Or, $7^n = 7^{6k} = (7^3)^{2k} \equiv 1^{2k} [9] \equiv 1 [9]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $6 \mid n$ on a $7^n \equiv 1 [9]$.
2. On a $7^3 \equiv 1 [9]$ mais 6 ne divise pas 3 donc la réciproque est fausse.

Exercice 9 :

On note $A_n = n(2n+1)(7n+7)$, où n est un entier naturel.

1. Montrer que A_n est pair.
2. Montrer que A_n est divisible par 3.
3. Le nombre A_n est-il divisible par 5 pour tout entier naturel n ?

Correction

1. On a $A_n = n(2n+1)(7n+7)$. Dressons un tableau de congruences :

$n \equiv \dots [2]$	0	1
$(7n+7) \equiv \dots [2]$	$7 \equiv 1 [2]$	$14 \equiv 0 [2]$
$(2n+1) \equiv \dots [2]$	1	$3 \equiv 1 [2]$
$A = n(7n+7)(2n+1) \equiv \dots [2]$	0	0

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \equiv 0 [2]$ donc A_n est pair pour tout entier naturel.

2. Dressons un tableau de congruences :

$n \equiv \dots [3]$	0	1	2
$(7n+7) \equiv \dots [3]$	$7 \equiv 1 [3]$	$14 \equiv 2 [3]$	$21 \equiv 0 [3]$
$(2n+1) \equiv \dots [3]$	1	$3 \equiv 0 [3]$	$5 \equiv 2 [3]$
$A = n(7n+7)(2n+1) \equiv \dots [3]$	0	0	0

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \equiv 0 [3]$ donc A_n est divisible par 3 pour tout entier naturel.

3. Dressons un tableau de congruences :

$n \equiv \dots [5]$	0	1	2	3	4
$(7n+7) \equiv \dots [5]$	$7 \equiv 2 [5]$	$14 \equiv 4 [5]$	$21 \equiv 1 [5]$	$28 \equiv 3 [5]$	$35 \equiv 0 [5]$
$(2n+1) \equiv \dots [5]$	1	3	$5 \equiv 0 [5]$	$7 \equiv 2 [5]$	$9 \equiv 4 [5]$
$A = n(7n+7)(2n+1)$	0	$12 \equiv 2 [5]$	0	$18 \equiv 3 [5]$	$0 [5]$

Conclusion : A_n n'est pas congru à 0 modulo 5 lorsque $n \equiv 1 [5]$ donc A_n n'est pas divisible par 5 pour tout entier naturel n .

Exercice 10 :

1. Déterminer les congruences des puissances de 10 suivantes modulo 11 :
 $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4$.
2. En déduire que le nombre 67 485 est un multiple de 11.
3. Déterminer un critère de divisibilité d'un nombre par 11.

Correction

1. $10^0 = 1 \equiv 1 [11]$
 $10^1 = 10 \equiv -1 [11]$
 $10^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 [11]$
 $10^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 [11]$
 $10^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1 [11]$
2. $67485 = 6 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
 $67485 \equiv 6 \times 1 + 7 \times (-1) + 4 \times 1 + 8 \times (-1) + 5 \times 1 [11]$
 $67485 \equiv 6 - 7 + 4 - 8 + 5 [11] \equiv 0 [11]$ donc $11 \mid 67485$
3. On démontre aisément que $\forall k \in \mathbb{N}, 10^{2k} \equiv 1 [11]$ et $10^{2k+1} \equiv -1 [11]$.
 On déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N}, n = \sum_{k=0}^p a_k 10^k$, si $\sum_{k=0}^p a_k (-1)^k = 0$ alors $11 \mid n$.

Exercice 11 : D'après bac S, Métropole, juin 2009

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel k , on a $2^{3k} \equiv 1 [7]$.
 (b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?
2. Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
 On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
 (a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 [7]$.
 (b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Corrigé

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $2^{3k} = (2^3)^k = 8^k \equiv 1 [7]$ donc $(2^3)^k \equiv 1^k [7] \equiv 1 [7]$ donc $2^{3k} \equiv 1 [7]$
 (b) On a $2009 = 3 \times 669 + 2$ donc $2^{2009} = 2^{3 \times 669 + 2} = 2^{3 \times 669} \times 2^2 = (2^3)^{669} \times 2^2 \equiv 1^{669} \times 4 [7] = 4 [7]$
 donc le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est 4.
2. (a) $10 \equiv 3 [7]$ donc $10^2 \equiv 9 [7] \equiv 2 [7]$ donc $10^3 \equiv 3 \times 2 [7] \equiv 6 [7] \equiv -1 [7]$
 (b) $N \equiv 0 [7] \Leftrightarrow a \times 10^3 + b \equiv 0 [7] \Leftrightarrow -a + b \equiv 0 [7] \Leftrightarrow a \equiv b [7]$

On procède alors par disjonction de cas.

Si $a=1$ alors $b \equiv 1 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=1$ ou $b=8$ donc $N=1001$ ou $N=1008$
 Si $a=2$ alors $b \equiv 2 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=2$ ou $b=9$ donc $N=2002$ ou $N=2009$
 Si $a=3$ alors $b \equiv 3 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=3$ donc $N=3003$
 Si $a=4$ alors $b \equiv 4 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=4$ donc $N=4004$
 Si $a=5$ alors $b \equiv 5 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=5$ donc $N=5005$
 Si $a=6$ alors $b \equiv 6 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=6$ donc $N=6006$
 Si $a=7$ alors $b \equiv 7 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=0$ ou $b=7$ donc $N=7000$ ou $N=7007$
 Si $a=8$ alors $b \equiv 8 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=1$ ou $b=8$ donc $N=8001$ ou $N=8008$
 Si $a=9$ alors $b \equiv 9 [7]$ avec $0 \leq b \leq 9$ donc $b=2$ ou $b=9$ donc $N=9002$ ou $N=9009$

Exercice 12 :

Suite et congruence

On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel n , par $U_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

1. Calculer U_0 , U_1 et U_2 .
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+3} \equiv U_n [7]$.
3. En déduire les valeurs de n pour lesquelles U_n est divisible par 7.
4. Recopier et compléter la fonction Python donnée ci-dessous afin qu'elle affiche les indices i des termes de la suite vérifiant $U_i \equiv 0 [7]$.

```

1  from math import*
2  def indice(n):
3      ...
4      for i in range(n+1):
5          u = ...
6          if u ... 7 == 0:
7              l.append(...)
8      return l

```

Correction

1. $U_0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 = 3$; $U_1 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14$ et $U_2 = 2^2 + 2^4 + 2^6 = 4 + 16 + 64 = 84$
2. $U_{n+3} = 2^{n+3} + 2^{2(n+3)} + 2^{3(n+3)} = 2^3 \times 2^n + 2^6 \times 2^{2n} + 2^9 \times 2^{3n}$
Or, $2^3 \equiv 1 [7]$ donc $2^6 \equiv 1 \times 1 [7] \equiv 1 [7]$ et $2^9 \equiv 1^3 [7] = 1 [7]$
donc $U_{n+3} \equiv 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} [7] \equiv U_n [7]$
3. D'après la question 1., $U_0 = 3 [7]$, $U_1 = 14 \equiv 0 [7]$ et $U_2 = 84 = 12 \times 7 \equiv 0 [7]$
donc $7 | U_n \Leftrightarrow n = 1 + 3k$ ou $n = 2 + 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
4. On complète le programme comme ci-dessous.

```

1  from math import*
2  def indice(n) :
3      l = []
4      for i in range(n+1):
5          u = 2**i + 2**(2*i)+2**(3*i)
6          if u%7==0:
7              l.append(i)
8      return l
9

```

Exercice 13 : D'après bac S, Centres étrangers, juin 2019

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou en différence de cubes d'entiers naturels.

Par exemples : $13=4^3+7^3+7^3-9^3-2^3$; $13=2^3+2^3-1^3-1^3-1^3$ et $13=1^3+7^3+10^3-11^3$.

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « somme » de cubes à la place de « somme ou différence de cubes d'entiers naturels ». Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en somme de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en somme de 4 cubes.

1. (a) En utilisant l'égalité $13=1^3+7^3+10^3-11^3$ donner une décomposition de 40 en somme de 5 cubes
 (b) On admet que, pour tout entier naturel n , on a : $6n=(n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$.
 En déduire une décomposition de 48 en somme de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en somme de 5 cubes différente de celle donnée en 1. (a).
2. Le nombre 40 est une somme de 4 cubes : $40=4^3-2^3-2^3-2^3$.
 On veut savoir si 40 peut être décomposé en somme de 3 cubes.
 (a) Produire sans justifier le tableau de congruence modulo 9 de n^3 .
 (b) Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en somme de 3 cubes.

Correction

1. (a) $40=13+27$. Or, $13=1^3+7^3-10^3-11^3$ et $27=3^3$ donc $40=1^3+7^3+10^3-11^3+3^3$
 (b) $48=6 \times 8=(8+1)^3+(8-1)^3-8^3-8^3=9^3+7^3-8^3-8^3$ donc $40=9^3+7^3-8^3-8^3-2^3$
2. (a) On construit le tableau de congruence modulo 9 ci-dessous.

$n \equiv \dots [9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 \equiv \dots [9]$	0	1	$8 \equiv -1$	$27 \equiv 0$	1	-1	0	1	-1

- (b) Supposons que 40 peut se décomposer en une somme de 3 cubes.
 On a alors $40=a^3+b^3+c^3$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$.
 D'après le tableau de la question précédente, a^3, b^3, c^3 sont congrus modulo 9 à -1, 0 ou 1 donc $a^3+b^3+c^3$ est congru à -3, -2, -1, 0, 1, 2 ou 3 modulo 9.
 Or $40=9 \times 4 + 4$ donc $40 \equiv 4 [9]$ donc 40 ne peut pas se décomposer en une somme de trois cubes.