

Exercice 1: Déterminer le quotient et le reste de la division de -5000 par 17 .

Correction

$$\begin{aligned} 5000 &= 17 \times 294 + 2 \\ -5000 &= 17 \times (-294) - 2 \\ -5000 &= 17 \times (-295 + 1) - 2 \\ -5000 &= 17 \times (-295) + 17 - 2 \\ -5000 &= 17 \times (-295) + 15 \end{aligned}$$

donc le quotient et le reste de la division euclidienne de -5000 par 17 sont (-295) et 15 .

Exercice 2 : La division euclidienne de 256 par un entier naturel non nul b a un reste égal à 25 . Déterminer les valeurs possibles de b et du quotient q .

Correction

Soit $b \in \mathbb{N}, b \neq 0$. Le reste de la division euclidienne de 256 par b est 25 donc il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $256 = b \times q + 25$ avec $0 \leq 25 < b$.

Or, $256 = b \times q + 25$ avec $0 \leq 25 < b \Leftrightarrow 231 = b \times q$ avec $0 \leq 25 < b$ donc $b \mid 231$ avec $0 \leq 25 < b$

Or, $231 = 1 \times 231 = 3 \times 77 = 7 \times 33 = 11 \times 21 = 33 \times 7 = 77 \times 3 = 231 \times 1$.

On déduit que les couples $(b; q)$ avec $25 < b$ solutions sont $(33; 7); (77; 3)$ et $(231; 1)$.

Exercice 3 : Soit n un entier naturel. Posons $A = n(n-2)(n+2)$. Démontrer que A est un multiple de 3 .

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dressons un tableau de congruences modulo 3 de $A = n(n-2)(n+2)$.

| | | | |
|--------------------------|---|---|---|
| $n \equiv \dots [3]$ | 0 | 1 | 2 |
| $(n-2) \equiv \dots [3]$ | 1 | 2 | 0 |
| $(n+2) \equiv \dots [3]$ | 2 | 0 | 1 |
| $A_n \equiv \dots [3]$ | 0 | 0 | 0 |

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = n(n-2)(n+2) \equiv 0 [3]$ donc $3 \mid A_n$

Exercice 4 : Dans la division euclidienne de -37 par l'entier naturel non nul b , le reste est 14. Quelles sont les valeurs possibles du diviseur et du quotient ?

Correction

Il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $-37 = b \times q + 14$ avec $0 \leq 14 < b$.

Or, $-37 = b \times q + 14$ avec $0 \leq 14 < b \Leftrightarrow -51 = b \times q$ avec $0 \leq 14 < b$.

Or, $-51 = 1 \times (-51) = 3 \times (-17) = 17 \times (-3) = 51 \times (-1)$ donc les seuls couples solutions $(b; q)$ avec $14 < b$ qui conviennent sont $(17; -3); (51; -1)$.

Exercice 5 : Démontrer que 4 n'admet pas d'inverse modulo 6.

Correction

Dressons un tableau de congruences modulo 6.

| | | | | | | |
|-----------------------|---|---|---|---|---|---|
| $n \equiv \dots [6]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $4n \equiv \dots [6]$ | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |

Conclusion : $4n$ n'est jamais congru à 1 modulo 6 donc 4 n'admet pas d'inverse modulo 6.