Exercice 1 – Question de cours

Soient z et z' deux nombres complexes .

1. Démontrer que $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer, par récurrence sur n , que $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\overline{z^n}\right) = \left(\overline{z}\right)^n$.

Exercice 2 - QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Vous justifierez votre réponse par un calcul rigoureux.

1. Soit $z = (3-i)(5+3i)$. La partie imaginaire de $\overline{z}$ est :

   $a) -4$ $b) 4$ $c) 4i$ $d) -4i$

2. La forme algébrique de l'inverse du nombre complexe $z = 2-3i$ est :

   $a) \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ $b) -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$ $c) \frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$ $d) \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

3. L'équation $(-4+3i)z = 4+2i$ a pour solution :

   $a) -\frac{24}{25} - \frac{4}{5}i$ $b) \frac{24}{25} + \frac{4}{5}i$ $c) -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$ $d) \frac{2}{5} + \frac{4}{25}i$

Exercice 3

Déterminer la forme algébrique des conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 5 - \left(2 + \frac{i}{3}\right) \qquad z_2 = (\sqrt{3} - i)(-2 + \sqrt{3}i)$$

Exercice 4

Soit z un nombre complexe non nul z . Montrer que $Z = \frac{i}{z} + \frac{i}{\overline{z}}$ est un imaginaire pur.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $(S): \begin{cases} 2\overline{z_1} - 3\overline{z_2} = 2-3i \\ 2z_1 - 5z_2 = 4+5i \end{cases}$.

Correction

Exercice 1

On note $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$.

1. Démontrons que $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.

$$\overline{z\times z'}=\overline{(xx'-yy')+i(xy'+x'y)}=(xx'-yy')-i(xy'+x'y)=(x-iy)(x'-iy')=\overline{z}\times\overline{z'}$$

2. Démontrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.
Initialisation :
Pour $n=0$ on a $\overline{z^0}=\overline{1}=1$ et $\overline{z}^0=1$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
Hérédité :
Hypothèse de récurrence :
On suppose qu'il existe un rang $n\geqslant 0$ pour lequel $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
au rang suivant, $n+1$, on a $\overline{z^{n+1}}=\overline{z^n\times z}=\overline{z^n}\times\overline{z}=\overline{z}^n\times\overline{z}=\overline{z}^{n+1}$
donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 2 - QCM

1. Soit $z=(3-i)(5+3i)$. La partie imaginaire de $\overline{z}$ est :

$z=(3-i)(5+3i)=15+9i-5i+3=18+4i$ donc $\overline{z}=18-4i$ **réponse :** $a)-4$

2. La forme algébrique de l'inverse du nombre complexe $z=2-3i$ est :

$\frac{1}{z}=\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{2^2+(-3)^2}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$ **réponse :** $d)\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$

3. L'équation $(-4+3i)z=4+2i$ a pour solution :

$$(-4+3i)z=4+2i\Leftrightarrow z=\frac{4+2i}{-4+3i}=\frac{(4+2i)(-4-3i)}{(-4)^2+3^2}=\frac{-16-12i-8i+6}{25}=\frac{-10-20i}{25}=-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$$

réponse : $c)-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$

Exercice 3

$$\overline{z_1}=5-\overline{\left(2+\frac{i}{3}\right)}=5-(2-\frac{i}{3})=5-2+\frac{i}{3}=3+\frac{i}{3}$$

$$\overline{z_2}=\overline{(\sqrt{3}-i)(-2+\sqrt{3}i)}=(\sqrt{3}+i)(-2-\sqrt{3}i)=-2\sqrt{3}-3i-2i+\sqrt{3}=-\sqrt{3}-5i$$

Exercice 4

Soit z un nombre complexe non nul z . Posons $Z=\frac{i}{z}+\frac{i}{\overline{z}}$. On a :

$\overline{Z}=\frac{\overline{i}}{\overline{z}}+\frac{\overline{i}}{z}=\frac{-i}{\overline{z}}+\frac{-i}{z}=-(\frac{i}{\overline{z}}+\frac{i}{z})=-Z$ donc Z est un imaginaire pur.

Exercice 5

$$(S):\begin{cases}2\overline{z_1}-3\overline{z_2}=2-3i\\ 2z_1-5z_2=4+5i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2z_1-3z_2=2+3i\\ 2z_1-5z_2=4+5i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2z_1-3z_2=2+3i\\ 2z_1=-2-2i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2z_1-3z_2=2+3i\\ z_1=-1-i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(1-i)-3z_2=2+3i\\ z_1=-1-i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-2i-3z_2=2+3i\\ z_1=-1-i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3z_2=2+3i-2+2i=5i\\ z_1=-1-i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_2=-\frac{5}{3}i\\ z_1=-1-i\end{cases}$$

Conclusion : $S=\left(-1-i;-\frac{5}{3}i\right)$.