

## La calculatrice est interdite

## Exercice 1

On considère les nombres complexes  $z_1=3-2i$  et  $z_2=-1+2i$ .

1. Calculer les expressions algébriques des nombres complexes  $z_1^2; z_1 z_2; z_2^2$  et  $(z_1+z_2)$ .
2. En déduire l'expression algébrique du nombre complexe  $(z_1+z_2)(z_1^2-z_1 z_2+z_2^2)$ .
3. Calculer  $z_1^3; z_2^3$  et  $z_1^3+z_2^3$
4. Qu'observez-vous ?
5. Démontrer que pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$ , on a  $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ .

## Exercice 2

Soit  $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ . Démontrer que  $A$  est inversible puis calculer  $A^{-1}$ .

## Exercice 3

Soit  $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$ .
2. Vérifier que  $A^2+A=2I_3$ .
3. En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

## Exercice 4

On considère le système (S): 
$$\begin{cases} -2x-y+z=-7 \\ 3x-2y-z=-3 \\ -x+3y-2z=4 \end{cases}$$

1. Déterminer les matrices  $A, X$  et  $B$  telles que le système s'écrive sous la forme  $AX=B$ .

2. Soit  $C=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $AC$ .

(b) En déduire que  $A$  est inversible et donner  $A^{-1}$ .

3. En déduire la résolution du système (S).

## Exercice 5

On considère la matrices  $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2, A^3$ .
2. Conjecturer la forme de  $A^n, n \geq 1$ . puis démontrer votre conjecture par récurrence sur  $n \geq 1$ .

## Corrigé

## Exercice 1

On considère les nombres complexes  $z_1=3-2i$  et  $z_2=-1+2i$ .

- $$z_1^2=(3-2i)^2=9-12i-4=5-12i$$

$$z_1z_2=(3-2i)(-1+2i)=-3+6i+2i+4=1+8i$$

$$z_2^2=(-1+2i)^2=1-4i-4=-3-4i$$

$$z_1+z_2=(3-2i)+(-1+2i)=2$$
- $$(z_1+z_2)(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)=2(5-12i-1-8i-3-4i)=2(1-24i)=2-48i$$
- $$z_1^3=z_1^2 \times z_1=(5-12i)(3-2i)=15-10i-36i-24=-9-46i$$

$$z_2^3=z_2^2 \times z_2=(-3-4i)(-1+2i)=3-6i+4i+8=11-2i$$

$$z_1^3+z_2^3=(-9-46i)+(11-2i)=2-48i$$
- On observe que  $z_1^3+z_2^3=(z_1+z_2)(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)$
- Soient  $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$ . On a  $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$

## Exercice 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ . On a  $\det(A) = 1 \times 3 - (-2) \times 2 = 3 + 4 = 7 \neq 0$  donc  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

## Exercice 3

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

- $$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
- $$A^2 + A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$
- $$A^2 + A = 2I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3 \Leftrightarrow A \times \left( \frac{1}{2}(A + I_3) \right) = I_3$$

$$\text{donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4**

$$\text{On considère le système } (S) : \begin{cases} -2x - y + z = -7 \\ 3x - 2y - z = -3 \\ -x + 3y - 2z = 4 \end{cases} .$$

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le système (S) s'écrit sous la forme matricielle  $AX = B$ .

$$2. \text{ Soit } C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} .$$

$$(a) \text{ Calculer } AC = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} .$$

$$(b) \text{ On déduit que } -\frac{1}{14}AC = I_3 \text{ donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\frac{1}{14}C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

$$3. \quad AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = -\frac{1}{14}CB$$

$$X = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} -49 - 3 + 12 \\ -49 - 15 + 4 \\ -49 - 21 + 28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} -40 \\ -60 \\ -42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{30}{7} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Conclusion : Le système (S) a une seule solution, le triplet  $\left(\frac{20}{7}; \frac{30}{7}; 3\right)$ .

**Exercice 5**

On considère la matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$1. \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \text{Conjecture : } P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Démontrons cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

Initialisation : pour  $n=1$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1-1} & -2^{1-1} \\ -2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix}$  donc  $P(1)$  est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  tel que  $P(n)$  est vraie. On a :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & -2^{n-1} - 2^{n-1} \\ -2^{n-1} - 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Or,  $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$  donc  $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}$  donc  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion :  $P(n)$  est initialisée au rang  $n=1$  et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  d'après le principe du raisonnement par récurrence.