Exercice 1

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1=(2\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{2}) \qquad z_2=(1-2i)^5$$

Exercice 2

Calculer, lorsqu'ils sont définis, les produits AB et BA ci-dessous :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\2&1&0&0\end{pmatrix}$$

Exercice 3

On considère la matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2, A^{3.}$.
2. Conjecturer la forme de $A^n, n\geqslant 1.$ puis démontrer votre conjecturer par récurennce sur $n\geqslant 1.$.

Corrigé

Exercice 1

$$z_1=(2\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{2})=2\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i\sqrt{2}=(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})+i(\frac{-\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2})$$

$$z_1=(\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2})+i(\frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2=(1-2i)^5=1^5-5\times1^4\times(2i)+10\times1^3\times(2i)^2-10\times1^2\times(2i)^3+5\times1^1\times(2i)^4-(2i)^5$$

$$z_2=1-10i-40+80i+80-32i$$

$$z_2=41+38i$$

Exercice 2

$A\in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ et $B\in M_{2\times4}(\mathbb{R})$ donc le produit AB est calculable mais pas le produit BA.

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\2&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&0&1\\1&2&0&1\\6&3&0&0\end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. $A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$

   $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}$

2. Conjecture : $\forall n\in\mathbb{N}, A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$

   Démontrons cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

Initialisation : Pour $n=1, A^1=A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{1-1} & -2^{1-1} \\ -2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix}$ donc la propriété est vraie au rang n=1.

Hypothèse de récurennce : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ pour lequel $A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Hérédité : On a alors $A^{n+1}=A^n A=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 2^{n-1} & -2\times 2^{n-1} \\ -2\times 2^{n-1} & 2\times 2^{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}$ donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang $n=1$ et héréditaire donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 1$, d'après le principe du raisonnement par récurrence.