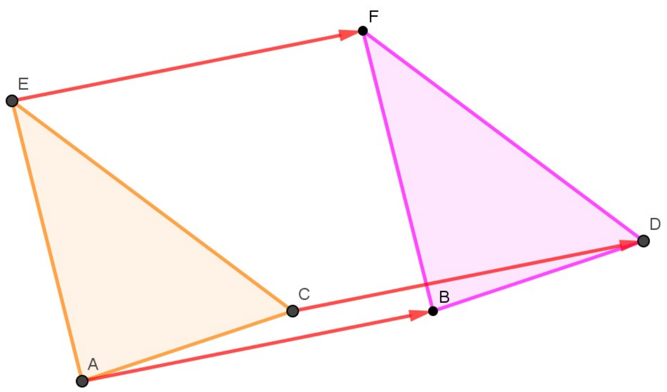
Chapitre 13 : Vecteurs

I. Translation et vecteur

Sur la figure ci-dessous, D et F sont les images respectives des points C et D par **la translation qui transforme A en B**.

La flèche allant de A vers B indique **la direction**, **le sens et la longueur** du déplacement effectué pour aller du point A au point B.



Définition : Soit A et B deux points distincts du plan.
La translation qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

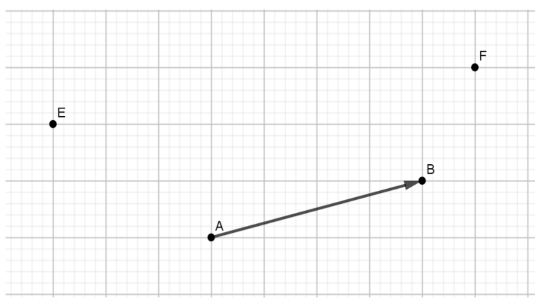
Propriété : Lorsque A et B sont deux points distincts, **le vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- une **direction** : celle de la droite (AB)
- un **sens** : de A vers B
- une **longueur** : la longueur AB appelée **norme du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$

Histoire :

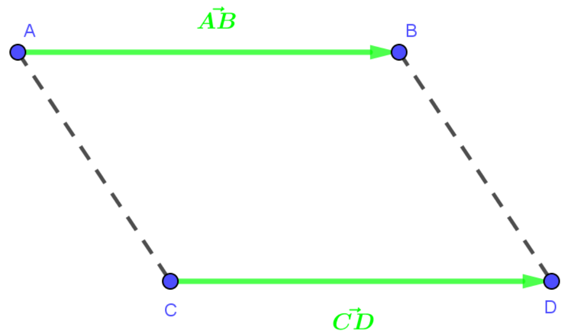
- *le terme « vecteur » est dû au mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865)*
- *la notation* $\overrightarrow{AB}$ *ne sera adopté que vers 1960*

Exercice 1
Construire les points U et V tels que $\overrightarrow{EU}=\overrightarrow{VF}=\overrightarrow{AB}$.



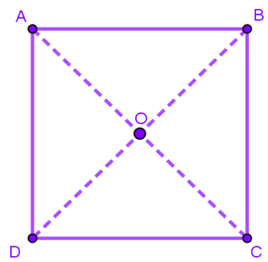
II. Vecteurs égaux

Définition : Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que le point D est l'image du point C par la **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exercice 2

Dans le carré ABCD de centre O ci-contre, compléter les égalités suivantes :

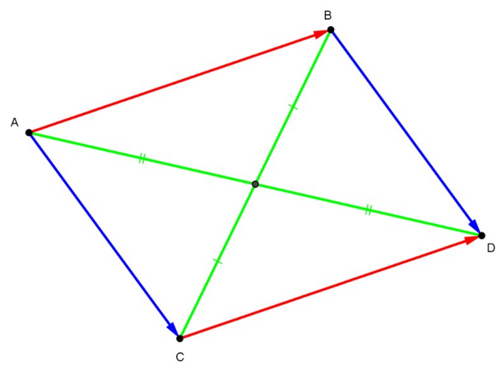


$\overrightarrow{AB}=$ $\overrightarrow{CB}=$

$\overrightarrow{OC}=$ $\overrightarrow{DO}=$

Propriétés : A, B, C et D désignent quatre points du plan.

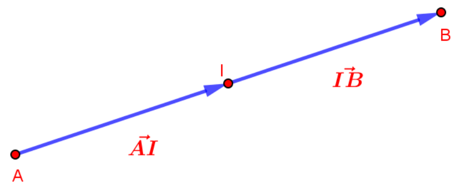
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, AB<u>D</u>C est un **parallélogramme**.
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le **même milieu**.
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont **même direction, même sens et même longueur**.



Remarques :

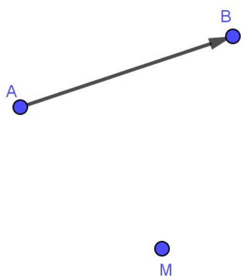
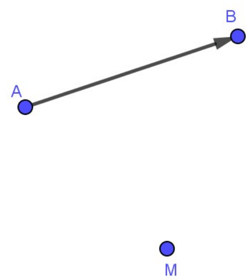
- *Attention à l'ordre des points entre les vecteurs égaux et le nom du parallélogramme.*
- *Le parallélogramme ABDC peut être aplati.*

Propriété : I est le **milieu** de [AB] si, et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.



Méthode - Construire l'image d'un point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

- Pour cela on place le point I milieu de [BM] puis on construit l'image du point A par la symétrie ce centre I.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par, sa direction (la droite (AB)), son sens (de A vers B) et sa norme (la longueur AB).
- Construire le point M' image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ revient à tracer le parallélogramme ABM'M.

Par la symétrie de centre I	Par le parallélogramme ABM'M
	

Exercice 3 :

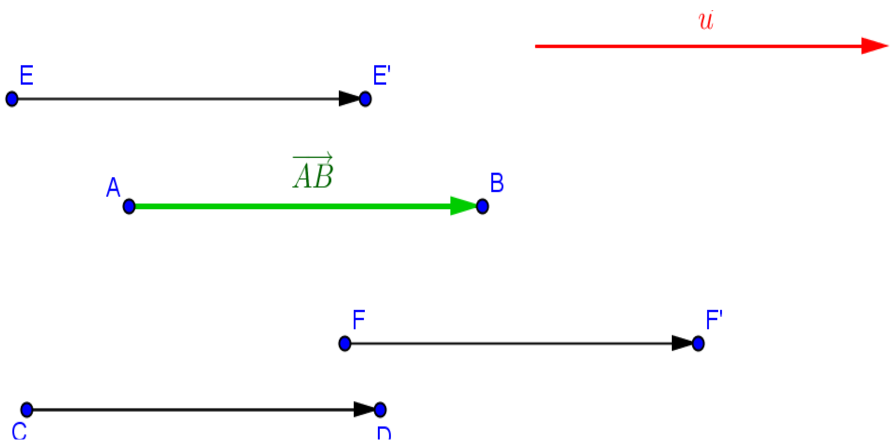
A, B, O et O' sont quatre points distincts. C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O. E et F sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O'.

1. Faire une figure
2. Démontrer que DCEF est un parallélogramme.

III. Représentants d'un même vecteur et vecteur nul

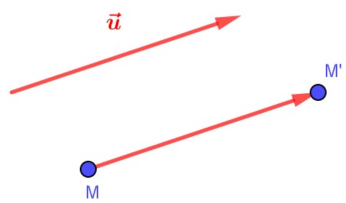
Étant donné deux points A et B, on peut construire une infinité de parallélogrammes dont un côté est le segment [AB]. On obtient ainsi une **infinité** de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

Tous ces vecteurs sont donc des **représentants** d'un même vecteur, qu'on note souvent à l'aide d'une lettre, $\vec{u}$. Ils ont tous même direction, même sens et même longueur.



Définition : Un vecteur non nul $\vec{u}$ est défini par **une direction** (une droite (d)), **un sens** (donné par la flèche) et **une norme** notée $\|\vec{u}\|$ (sa longueur)

Propriété : L'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.



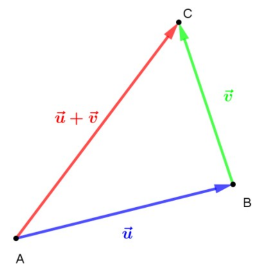
Définition : Lorsque les points A et B sont confondus, on appelle translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$ la translation qui transforme le point A en A.
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est alors appelé **vecteur nul** et noté $\vec{0}$.

Remarque : le vecteur nul n'a pas de direction, n'a pas de sens et sa norme est égale à 0.

IV. Somme de vecteurs

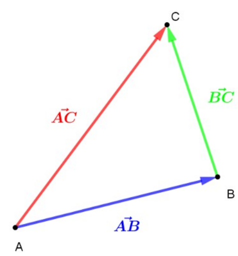
1. Somme de deux vecteurs

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
En enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ puis celle de vecteur $\vec{v}$,
on obtient un nouvelle translation dont le vecteur est associé est noté $\vec{u}+\vec{v}$



2. Relation de Chasles

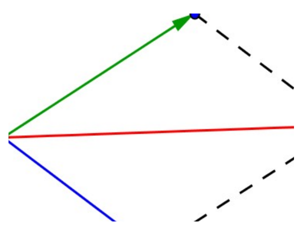
Propriété : Pour tous les points A, B et C du plan on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



3. Règle du parallélogramme

Propriété : Pour tous les points A, B, C et D du plan on a :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ $\Leftrightarrow$ ABDC est un **parallélogramme**



Remarque : la relation de Chasles et la règle du parallélogramme permettent de construire un représentant d'origine A de la somme de deux vecteurs.

4. Additions de vecteurs

Additions de vecteurs		
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$	$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$	$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

5. Vecteur opposé et différence de deux vecteurs

D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Définition : A et B désignent deux points du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **vecteur opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et noté $-\overrightarrow{AB}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{AB}$ ont **même direction, même norme mais sont de sens contraires.**

Définitions : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs.

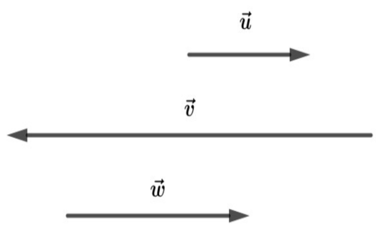
- L'**opposé** du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
- La **différence** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ notée $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+(-\vec{v})$

V. Produit d'un vecteur par un réel

Définition : Au vecteur $\vec{u}$ et au réel *k, on peut associer un vecteur, noté* $k\vec{u}$ appelé produit du vecteur $\vec{u}$ par *le réel k*, défini de la façon suivante :

- si $\vec{u}\neq\vec{O}$ et $k\neq 0$
  - $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction
  - $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même sens si k > 0 et sont de sens contraires si k < 0
  - $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|u\|$
- si $\vec{u}=\vec{O}$ ou $k=0$ alors $k\vec{u}=\vec{0}$

Exercice 4 : Compléter $\vec{v}=.....\vec{u}$ et $\vec{w}=.....\vec{u}$

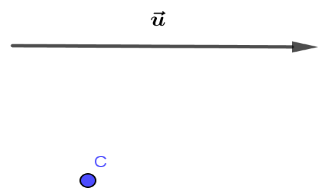


Règles de calculs : k et k' désignent deux nombres réels , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs. On a :

- $k\vec{u}=\vec{O} \Leftrightarrow (k=0)\, ou\, (\vec{u}=\vec{O})$
- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$
- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $1\vec{u}=\vec{u}$
- $-1\vec{u}=-\vec{u}$

Exercice 5

Construire les vecteurs d'origine C égaux à $0{,}5\vec{u}$ et $-2\vec{u}$



Exercice 6

Construire un triangle RST et placer les points U et V tels que $\overrightarrow{RU}=2\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{VT}=\frac{3}{4}\overrightarrow{TS}$

VI. Géométrie repérée

1. Base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan

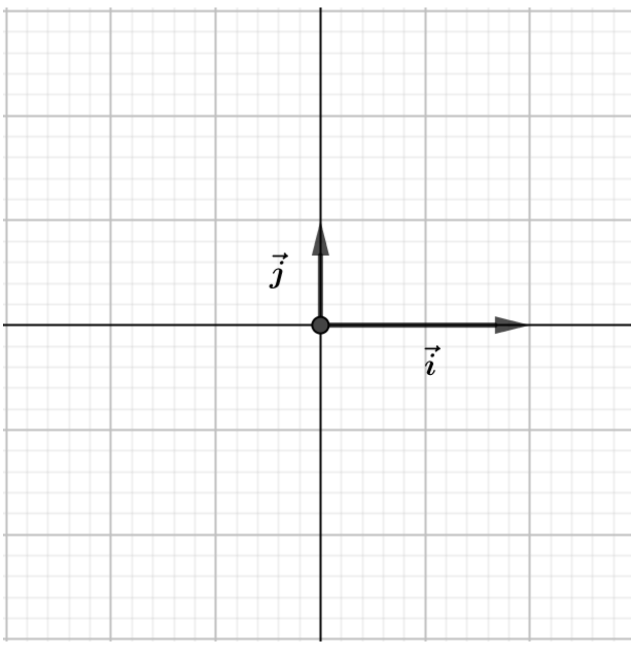
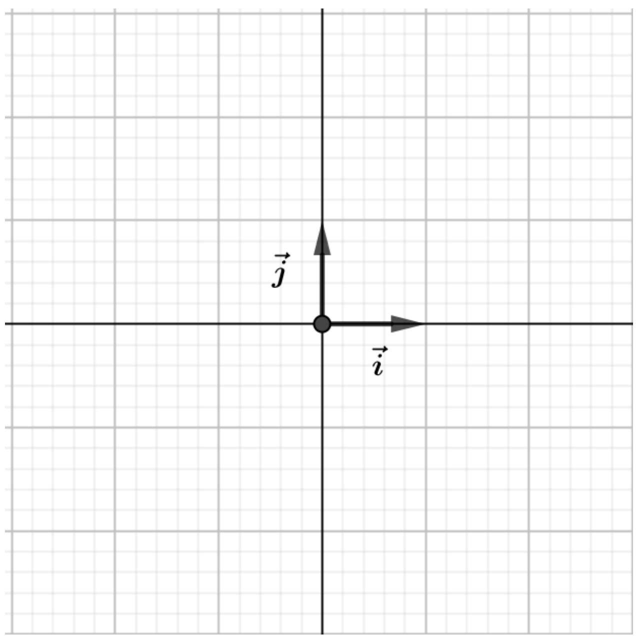
Définition : Une **base de vecteurs** du plan est un couple de deux vecteurs non nuls $(\vec{i}, \vec{j})$ n'ayant pas la même direction.

Définition : Deux vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ sont dits **orthogonaux** lorsque leurs **directions sont perpendiculaires.**

Définition : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan.

- Une base est dite **orthogonale** si les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ **sont orthogonaux.**
- Une base est dite **orthonormée** si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ **est orthogonale** et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$.

Exemple :

Base orthogonale	Base orthonormée
	

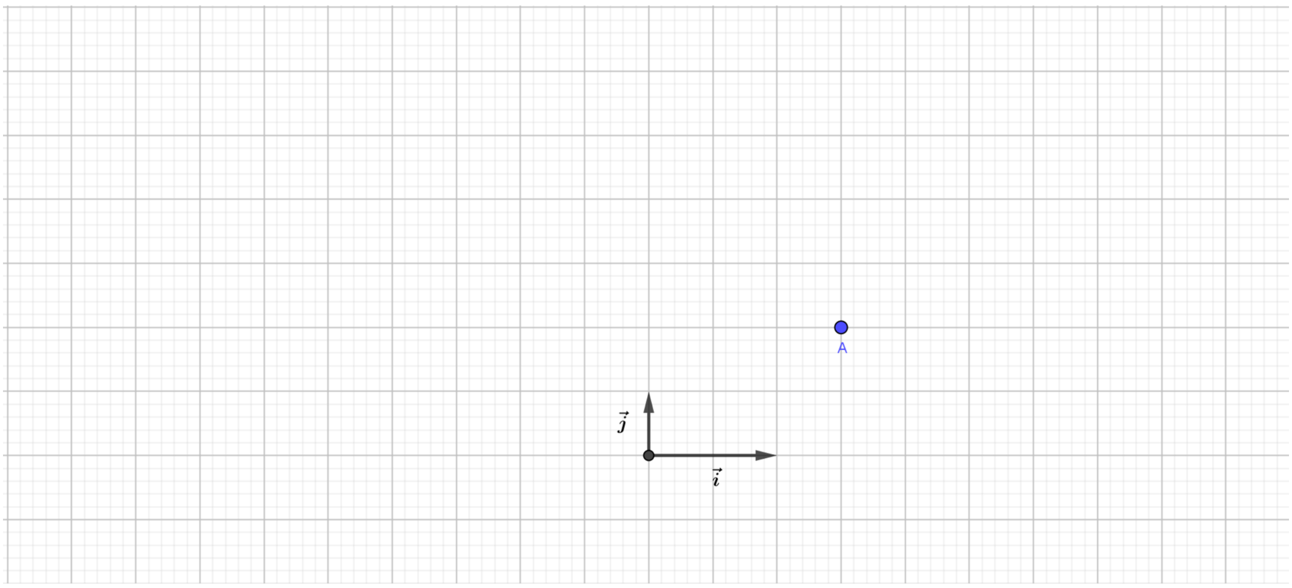
Remarque : soit ABCD un carré de côté 1 alors la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base orthonormée.

2. Coordonnées d'un vecteur dans une base du plan

Théorème et définition : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan.
Il existe un unique couple $(x; y)$ de réels tel que $\boldsymbol{\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}}$. On note $\boldsymbol{\vec{u}(x; y)}$ ou $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$.

Remarque : le vecteur nul a pour coordonnées (0;0).

Exercice 7
Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, construire les vecteurs $\vec{u}(2;3)$;$\vec{v}(-1;-1)$;$\vec{w}(-4;1)$ et $\vec{x}(-5;-2)$ d'origine A.

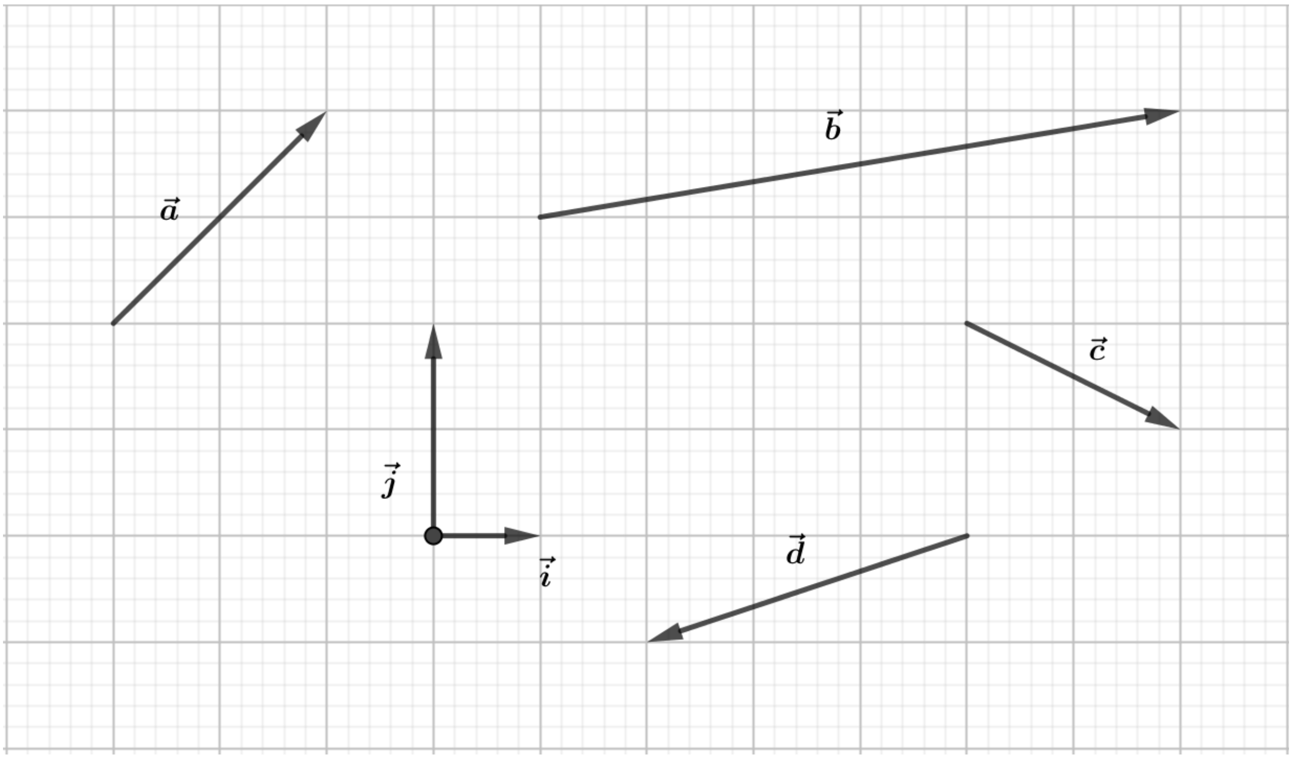


Compléter les égalités suivantes :

$\vec{u} = \ldots.\ \vec{i} + \ldots.\ \vec{j}$ $\qquad$ $\vec{v} = \ldots.\ \vec{i} + \ldots.\ \vec{j}$ $\qquad$ $\vec{w} = \ldots.\ \vec{i} + \ldots.\ \vec{j}$ $\qquad$ $\vec{x} = \ldots.\ \vec{i} + \ldots.\ \vec{j}$

Exercice 8

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}$ et $\vec{d}$ dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j})$.



Compléter les égalités suivantes :

$\vec{a}=....\,\vec{i}+....\,\vec{j}$ $\vec{b}=....\,\vec{i}+....\,\vec{j}$ $\vec{c}=....\,\vec{i}+....\,\vec{j}$ $\vec{d}=....\,\vec{i}+....\,\vec{j}$

Propriété : deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont **égaux** si, et seulement si, ***x* = *x'* et *y* = *y'***

Remarque : cette propriété est équivalente à dire que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées.

3. Coordonnées d'un vecteur dans un repère du plan

Définition : Un repère du plan est la donnée d'un point O du plan et d'une base $(\vec{i}\,,\vec{j})$.
O est appelé origine du repère $(O;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Théorème et définition : Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et A un point du plan.
Il existe un unique couple $(x_A;y_A)$ de réels tel que $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$.
x_A **et** y_A sont appelés les **coordonnées** de A dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
x_A est l'**abscisse** de A et y_A est l'**ordonnée** de A.
On écrit $A(x_A;y_A)$.

Remarques :

- *les coordonnées de A dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.*
- *dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{i}$ a pour coordonnées (1 ; 0) et $\vec{j}$ a pour coordonnées (0 ; 1).*
- *Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées (0 ; 0)*

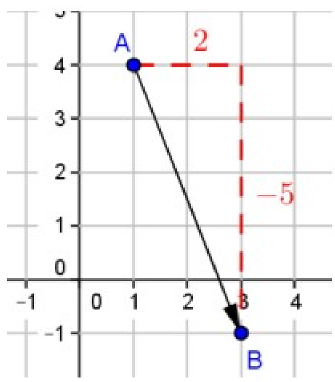
Propriété : Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B-x_A;y_B-y_A)$. On note $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

Démonstration :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B\vec{i}+y_B\vec{j})-(x_A\vec{i}+y_A\vec{j})=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j} \qquad \#$$

Exercice 9
Dans un repère du plan, on considère les points A(1 ; 4) et B(3 ; -1).

1. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$?
2. Retrouver votre résultat par le calcul.



Méthode - Déterminer les coordonnées d'un point à l'aide d'une égalité vectorielle

Dans le plan, on considère le point $A(1;-2)$ et le vecteur $\vec{u}(3;-2)$.
On cherche à déterminer les coordonnées de M telles que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$
On note $M(x;y)$. On a alors $\overrightarrow{AM}(x-1;y+2)$.

$$\overrightarrow{AM}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=3\\y+2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-4\end{cases}\Leftrightarrow M(4;-4)$$

Exercice 10
On considère le point $B(-2;3)$ et le vecteur $\vec{u}(5;-1)$.
Déterminer les coordonnées du point C tel que $\vec{u}=\overrightarrow{BC}$.

4. Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et de $k\vec{u}$

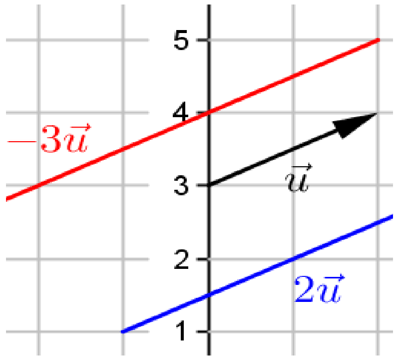
Propriété : Dans le plan muni d'un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x'\,;y+y')$

Exercice 11

On considère $\overrightarrow{AB}(-3\,;5)$ et $\overrightarrow{BC}(1\,;-3)$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$.

Propriété : Dans le plan muni d'un repère, on considère le vecteur $\vec{u}(x\,;y)$ et le réel k .
Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx\,;ky)$.

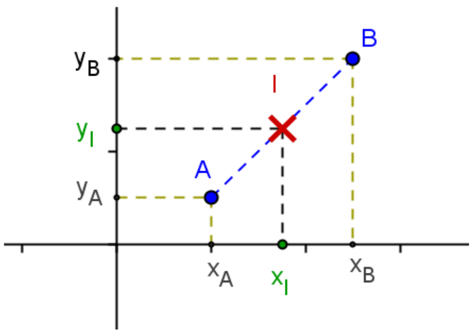
Exercice 12
A partir de la figure ci-contre, déterminer les coordonnées des vecteurs $-3\vec{u}$ et $2\vec{u}$



5. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété : Le **milieu** I du segment [AB] a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$



Démonstration :
I milieu de [A] si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I-x_A=x_B-x_I \\ y_I-y_A=y_B-y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_I=x_B+x_A \\ 2y_I=y_B+y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

#

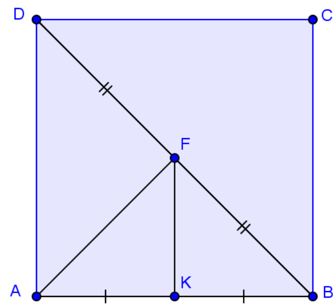
Remarques :

- *Les coordonnées du milieu sont donc les moyennes des abscisses et des ordonnées des deux points.*
- *Ces formules sont valables dans tous les repères du plan.*

Exercice 13
Par le calcul, déterminer les coordonnées de M milieu des ponts A(-2 ; 2) et B(6 ; 4).

Exercice 14
Le quadrilatère ABCD est un carré de côté 1.

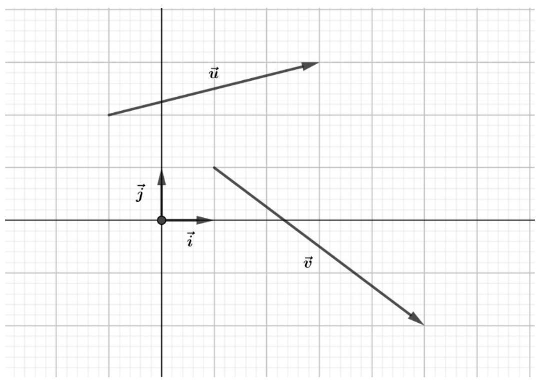
1. Quel est la nature du repère (A ; B , D) ? Justifier.
2. Dans le repère (A; B,D), déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.



6. Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété : Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$. On a $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 15
Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ ci-contre, lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis calculer leur norme.

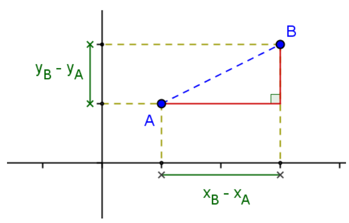


7. Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété : Le plan est rapporté à un un repère **orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

- AB désigne la distance entre les deux points A et B
- AB désigne aussi la longueur du segment [AB]



<u>Attention</u> : cette formule est fausse dans un repère non orthonormé !

Exercice 16
Dans un repère orthonormé, déterminer la valeur exacte de la longueur du segment [AB] lorsque A(1 ; 2) et B(3 ; 5) puis donner une valeur approchée par défaut à 0,1 près.

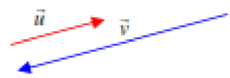
VII. Colinéarité de deux vecteurs

1. Vecteurs colinéaires

Définition : deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre <u>non nul</u> k tel que

$$\vec{v}=k\vec{u}$$

Remarques :



- *deux vecteurs colinéaires sont donc deux vecteurs qui ont la même direction mais pas nécessairement le même sens ni la même intensité.*
- *Par convention le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.*

Définition : Soit $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs dans une base $(\vec{i},\vec{j})$.
On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$, **le nombre** défini par :

$$det(\vec{u},\vec{v}) \text{ ou } \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\times y'-x'\times y$$

Propriété : Soit $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs dans une base $(\vec{i},\vec{j})$.

- $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $det(\vec{u},\vec{v})=0$
- $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $x\times y'-x'\times y=0$

Démonstration exigible au programme

- On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.
  - 1^{er} cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls.
    Il existe un réel $k\neq 0$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$ donc $x'=k\times x$ et $y'=k\times y$.
    On déduit que $x\times y'-x'\times y=x\times(ky)-(kx)\times y=k(xy-xy)=0$

- 2ème cas : $\vec{u}=\vec{0}$ alors $x=0$ et $y=0$ donc $xy'-x'y=0\times y'-0\times x'=0$
- 3ème cas : $\vec{v}=\vec{0}$ alors $x'=0$ et $y'=0$ donc $xy'-x'y=x\times 0-0\times y=0$

- Réciproquement, supposons $x\times y'-x'\times y=0$ alors :

  - 1[er] cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls.
    Comme $\vec{u}$ est non nul alors l'une de ses coordonnées est non nulle, par exemple x .
    Posons $k=\frac{x'}{x}$ alors $x'=kx$ donc $x\times y'-kx\times y=0$ donc $x\times y'-x'\times y=0$ donc $y'-ky=0$ car $x\neq 0$ donc $y'=ky$.
    On déduit que $x'=kx$ et $y'=ky$ donc $\vec{v}=k\vec{u}$.

  - 2ème cas : l'un des deux vecteurs est nul
    Or le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. #

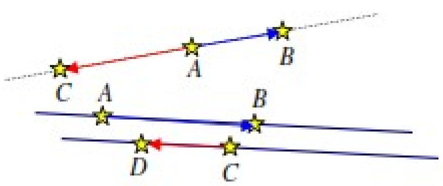
Exercice 17
Dire si dans chacun des cas suivants, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas

$\vec{u}(5;2)$ et $\vec{v}(35;14)$ $\qquad$ $\vec{u}(16;3)$ et $\vec{v}(49;10)$ $\qquad$ $\vec{u}(20;6)$ et $\vec{v}(30;9)$

2. Droites parallèles et points alignés

Propriétés :

- Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.
- Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.



Méthode - Montrer que trois points sont alignés

On considère les points A(1 ; 2), B(-2 ; 0) et C(7 ; 6).

$\overrightarrow{AB}(-2-1;0-2)$ donc $\overrightarrow{AB}(-3;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(7-1;6-2)$ donc $\overrightarrow{AC}(6;4)$

On constate que $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice 18

Dans un repère, on donne les points $A(\frac{-7}{2};\frac{-1}{2}), B(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ et $C(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$.

Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

2. Vecteur et milieu d'un segment

Propriété : I est le **milieu** de [AB] si, et seulement si, une des égalités suivantes est vraie :

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$