Exercice 1

ABCD est un quadrilatère. Réduire l'écriture de chaque vecteur avec la relation de Chasles.

1. $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$ 2. $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ 3. $\vec{w}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$

Correction

1. $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$
2. $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CC}+\overrightarrow{AB}$
   $\vec{v}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$
3. $\vec{w}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$

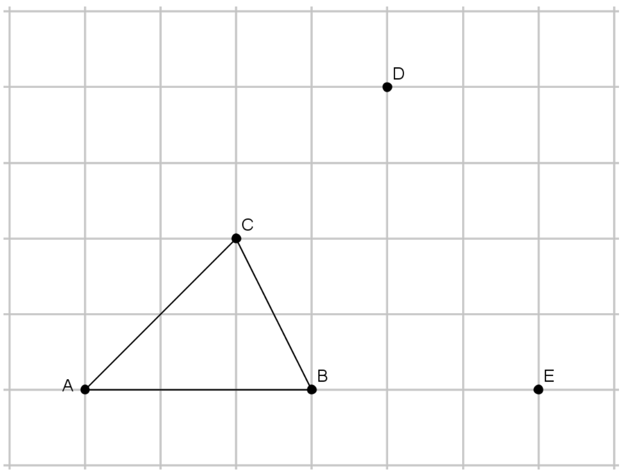
Exercice 2

ABC est un triangle, *D* et *E* sont les points tels que $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED}=2\,\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure
2. Démontrer que *C* est le milieu du segment [*AD*].

Correction

1.

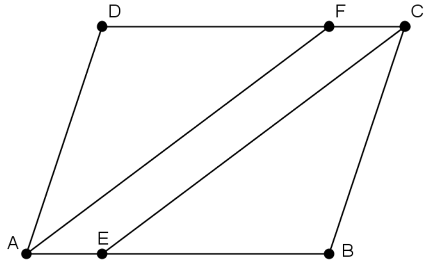


2. $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$ donc *B* est le milieu de [*AE*] donc $\overrightarrow{AE}=2\,\overrightarrow{AB}$ d'où
   $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=2\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{BC}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=2\,\overrightarrow{AC}$
   $\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AC}$ donc *C* est le milieu de [*AD*].

Exercice 3

Sur la figure ci-contre, *ABCD* est un parallélogramme, et *E* et *F* sont les points définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

Démontrer que le quadrilatère *AECF* est un parallélogramme.



Correction

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

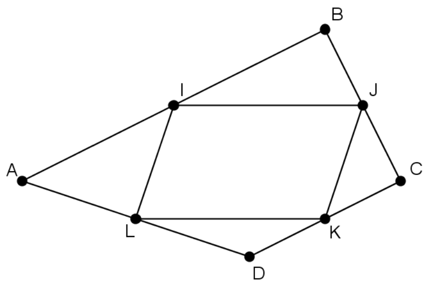
$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Or $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AE}$ donc *AECF* est un parallélogramme.

Exercice 4 – Théorème de Varignon

Soit un quadrilatère quelconque *ABCD*, et *I*, *J*, *K* et *L* les milieux respectifs des segments [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*].

1. Déterminer le réel *k* tel que $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{IB}$.
2. Exprimer de même $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{BJ}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{IJ}$.
4. Montrer que le quadrilatère *IJKL* est un parallélogramme.



Correction

1. *I* est le milieu de [*AB*] donc $\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{IB}$
2. *J* est le milieu de [*BC*] donc $\overrightarrow{BC}=2\,\overrightarrow{BJ}$
3. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\,\overrightarrow{IB}+2\,\overrightarrow{BJ}=2\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}\right)=2\,\overrightarrow{IJ}$
4. *L* est le milieu de [*AD*] donc $\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{LD}$ et *K* est le milieu de [*DC*] donc $\overrightarrow{DC}=2\,\overrightarrow{DK}$
   par conséquent $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=2\,\overrightarrow{LD}+2\,\overrightarrow{DK}=2\left(\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{DK}\right)=2\,\overrightarrow{LK}$.

On en déduit que $2\,\overrightarrow{IJ}=2\,\overrightarrow{LK}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ donc le quadrilatère *IJKL* est un parallélogramme.

Exercice 5

Soit les points $A(-1;3), B(1;6), C(2;4)$ et $D(-2;-2)$.

Les points *K*, *L* et *M* sont définis par $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{LC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

1. Calculer les coordonnées des points *K*, *L* et *M*.
2. Les droites (*AB*) et (*DC*) sont-elles parallèles ?
3. Démontrer que les points *K*, *L* et *M* sont alignés.

Correction

1. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc *K* est le milieu du segment [*AD*] .

   On déduit que $K(\frac{-1+(-2)}{2};\frac{3+(-2)}{2})\Leftrightarrow K(\frac{-3}{2};\frac{1}{2})$.

   $\overrightarrow{LC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc *L* est le milieu du segment [*BC*].

   On déduit que $L(\frac{1+2}{2};\frac{6+4}{2})\Leftrightarrow L(\frac{3}{2};5)$.

   $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ donc *M* est le milieu du segment [*AC*] .

   On déduit que $M(\frac{-1+2}{2};\frac{3+4}{2})\Leftrightarrow M(\frac{1}{2};\frac{7}{2})$.

2. $\overrightarrow{AB}(1-(-1);6-3)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}(2;3)$ et $\overrightarrow{DC}(2-(-2);4-(-2))\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}(4;6)$

   donc $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc (*AB*) et (*DC*) sont parallèles.

3. $\overrightarrow{KL}(\frac{3}{2}-(\frac{-3}{2});5-\frac{1}{2})\Leftrightarrow\overrightarrow{KL}(3;\frac{9}{2})$ et $\overrightarrow{KM}(\frac{1}{2}-(\frac{-3}{2});\frac{7}{2}-\frac{1}{2})\Leftrightarrow\overrightarrow{KM}(2;3)$

   $$det(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM})=\begin{vmatrix}3 & 2\\ \frac{9}{2} & 3\end{vmatrix}=3\times3-\frac{9}{2}\times2=9-9=0$$

   donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires donc *K*, *L* et *M* sont alignés.

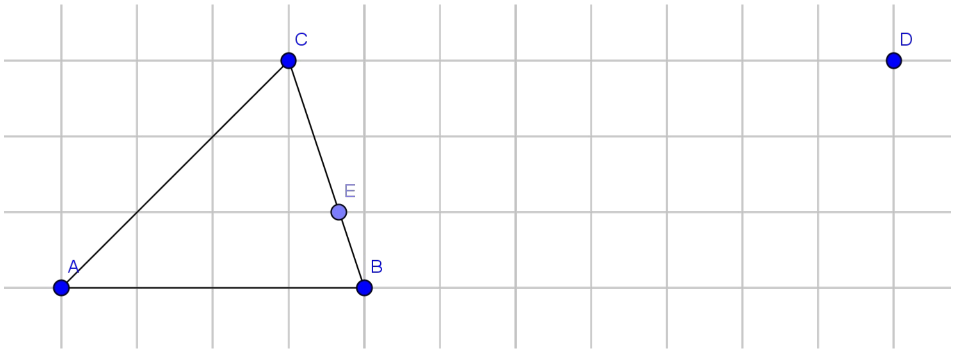
Exercice 6

ABC est un triangle, et *D* et *E* sont les points définis par $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.
2. Pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment-ils une base ?
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
4. En déduire que les points *A*, *D* et *E* sont alignés.

Correction

1.



2. *ABC* est un triangle et donc les point *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base.

3. $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ on a $\overrightarrow{AD}(2;1)$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

donc $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et donc dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ on a $\overrightarrow{AE}(\frac{2}{3};\frac{1}{3})$

4. $$det(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})=\begin{vmatrix}2 & \frac{2}{3}\\ 1 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=2\times\frac{1}{3}-1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires donc les points *A* *D* et *E* sont alignés.