Exercice 1

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$.

Soit *I* le milieu de [*BC*], et *E* et *F* les points définis par : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

1. Calculer les coordonnées des points *I*, *E* et *F*.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
3. Que peut-on en déduire ?
4. Démontrer que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme.
5. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
6. *ABCD* est-il un rectangle ? Justifier.
7. Les points *I*, *F* et *D* sont-ils alignés ? Justifier.

Correction

1. *I* le milieu de [*BC*] donc $I(\frac{1+6}{2};\frac{1+(-2)}{2})\Leftrightarrow I(\frac{7}{2};-\frac{1}{2})$.

   $\overrightarrow{AC}(6-3;-2-4)\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}(3;-6)$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}(1;-2)$.

   Posons $E(x;y)$ donc $\overrightarrow{AE}(x-3;y-4)$.

   $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow x-3=1 \text{ et } y-4=-2\Leftrightarrow x=4 \text{ et } y=2\Leftrightarrow E(4;2)$

   $\overrightarrow{AC}(3;-6)$ donc $\overrightarrow{CA}(-3;6)$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}(-1;2)$

   Posons $F(x;y)$ donc $\overrightarrow{CF}(x-6;y+2)$.

   $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow x-6=-1 \text{ et } y+2=2\Leftrightarrow x=5 \text{ et } y=0\Leftrightarrow F(5;0)$

2. $\overrightarrow{BE}(4-1;2-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}(3;1)$ et $\overrightarrow{IF}(5-\frac{7}{2};0-(\frac{-1}{2}))\Leftrightarrow\overrightarrow{IF}(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$

   On déduit que $2\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{BE}$ donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

3. $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires donc (*BE*) et (*IF*) sont parallèles donc *BEFI* est un trapèze.

4. $\overrightarrow{AB}(1-3;1-4)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}(-2;-3)$ et $\overrightarrow{DC}(6-8;-2-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}(-2;-3)$

   donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc *ABCD* est un parallélogramme.

5. $\overrightarrow{AC}(3;-6)$ donc $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{3^2+(-6)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

6. $\overrightarrow{BD}(8-1;1-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}(7;0)$ donc $\|\overrightarrow{BD}\|=\sqrt{7^2+0^2}=\sqrt{49}=7\neq\sqrt{45}$

   Les diagonales [*AC*] et [*BD*] ne sont pas de même longueur donc *ABCD* n'est pas un rectangle.

7. $\overrightarrow{IF}(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{ID}(\frac{9}{2};\frac{3}{3})$ donc $3\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{ID}$

   donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires donc les points *I*, *F* et *D* sont alignés.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-9\,;7)$, $B(3\,;5)$, $C(8\,;-2)$ et $D(-4\,;0)$.

1. Démontrer que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme.
2. Soit *M* le milieu de [*AB*] et *N* le point tel que $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

   Calculer les coordonnées des points *M* et *N*.
3. Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{BN}$.
4. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{MN}$.
5. En déduire que le triangle *MBN* est rectangle.
6. Quelle est la nature du quadrilatère *MBND* ?

Correction

1. $\overrightarrow{AB}(3-(-9)\,;5-7)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}(12\,;-2)$ et $\overrightarrow{DC}(8-(-4)\,;-2-0)\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}(12\,;-2)$

   donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme.

2. *M* le milieu de [*AB*] donc $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)\Leftrightarrow M\left(\frac{-9+3}{2}\,;\frac{7+5}{2}\right)\Leftrightarrow M(-3\,;6)$

   $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ donc *N* le milieu de [*DC*] donc

   $N\left(\frac{x_D+x_C}{2}\,;\frac{y_D+y_C}{2}\right)\Leftrightarrow N\left(\frac{8+(-4)}{2}\,;\frac{-2+0}{2}\right)\Leftrightarrow N(2\,;-1)$

3. $\overrightarrow{MD}(-4-(-3)\,;0-6)\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}(-1\,;-6)$ et $\overrightarrow{BN}(2-3\,;-1-5)\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}(-1\,;-6)$

   $det(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{BN})=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -6 & -6\end{vmatrix}=-1\times(-6)-(-6)\times(-1)=6-6=0$

4. $\overrightarrow{BM}(-3-3\,;6-5)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}(-6\,;1)$ donc $\|\overrightarrow{BM}\|=\sqrt{(-6)^2+1^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$

   $\overrightarrow{BN}(-1\,;-6)$ donc $\|\overrightarrow{BN}\|=\sqrt{(-1)^2+(-6)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$

   $\overrightarrow{MN}(2-(-3)\,;-1-6)\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}(5\,;-7)$ donc $\|\overrightarrow{MN}\|=\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$

5. D'une part $MN^2=(\sqrt{74})^2=74$

   d'autre part $BM^2+BN^2=(\sqrt{37})^2+(\sqrt{37})^2=37+37=74$

   donc $MN^2=BM^2+BN^2$

   donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle *MBN* est rectangle en *B*.

6. $\overrightarrow{MD}(-1\,;-6)$ et $\overrightarrow{BN}(-1\,;-6)$ donc $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BN}$ donc *MBND* est un parallélogramme.

   De plus $\|\overrightarrow{BM}\|=\sqrt{37}$ et $\|\overrightarrow{BN}\|=\sqrt{37}$ donc $BM=BN$

   donc parallélogramme *MBND* a deux côtés consécutifs de même longueur donc est un losange.

   Enfin l'angle $\widehat{MBN}$ est droit donc le losange *MBND* a un angle droit, c'est donc un carré.

Exercice 3

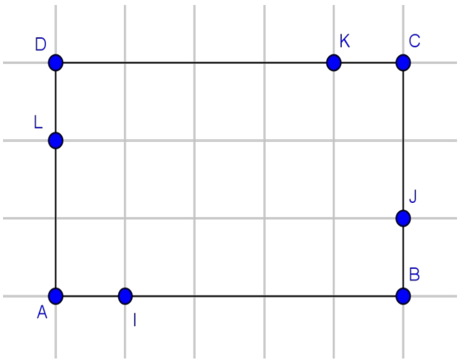
ABCD est un rectangle.

Les points *I*, *J*, *K* et *L* sont tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

1. Faire une figure.
2. Pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ forment-ils une base ?
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ dans la base $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$.
4. En déduire la nature du quadrilatère *IJKL*.
5. Démontrer que le centre du rectangle *ABCD* est le milieu du segment [*IK*].

Correction

1.



2. *ABCD* est un rectangle donc les point *A*, *B* et *D* ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{AD}$ est une base du plan.

3. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{-1}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

   Or ABCD est un rectangle donc un parallélogramme

   donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

   donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$,

   donc $\overrightarrow{IJ}(\frac{1}{3};\frac{4}{5})$ dans la base $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$.

   $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

   donc $\overrightarrow{LK}(\frac{1}{3};\frac{4}{5})$ dans la base $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$.

4. D'après les coordonnées, $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ donc *IJKL* est un parallélogramme.

5. Soit *O* le centre du rectangle donc *O* est le milieu de [*AC*] et donc $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$

   $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AO}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}$ donc *O* est le milieu de [*IK*].