

Chapitre 15 : Systèmes de deux équations à deux inconnues

I. Systèmes linéaires d'équations

Définition : Un système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues est de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ avec a, b, c, a', b', c' réels et le couple $(x; y)$ des inconnues.

Définition : Résoudre ce système revient à déterminer tous les couples solutions, c'est à dire tous les couples vérifiant à la fois les deux équations du système.

Exemple : On considère le système $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ -4x+5y=-1 \end{cases}$.

Vérifions que le couple (4;3) est une solution de ce système. On a :

$3 \times 4 - 2 \times 3 = 12 - 6 = 6$ et $-4 \times 4 + 5 \times 3 = -16 + 15 = -1$ donc le couple (4;3) est bien une solution du système.

II. Méthode de résolution par substitution

Méthode : Cette méthode consiste à exprimer l'une des deux variables en fonction de l'autre dans l'une des deux équations puis à substituer cette valeur dans la seconde équation : la nouvelle équation obtenue est alors une équation à une inconnue.

Exemple : Résoudre le système $(S): \begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.

1. On observe qu'on peut exprimer la variable y en fonction de la variable x à l'aide de la première équation.

2. Le système est alors équivalent au système $(S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.

3. On substitue alors la valeur $y=3x-5$ dans la deuxième équation.

4. On obtient le système équivalent $(S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3(3x-5)=7 \end{cases}$.

5. On résout alors la deuxième équation $(S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 11x-15=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 11x=22 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ x=2 \end{cases}$.

6. Il suffit maintenant de substituer la valeur $x=2$ dans la première équation pour obtenir la valeur de y . On déduit $(S): \begin{cases} y=3 \times 2 - 5 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$.

7. Conclusion : le système a une unique solution, le couple $(2;1)$. On note $S = \{(2;1)\}$.

Remarque : Dans la pratique, on rédige cette résolution par une succession de systèmes équivalents :

$$(S): \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + 3(3x - 5) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 11x - 15 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 11x = 22 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 3x - 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

III. Méthode de résolution par combinaison

Méthode : Cette méthode consiste à multiplier l'une ou les deux équations par des coefficients bien choisis afin qu'une addition ou une soustraction de deux équations membre à membre permette l'élimination d'une des deux inconnues.

Exemple ; Résoudre le système $(S): \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$ par la méthode par combinaisons.

1. On multiplie la première équation par 2 et la seconde par 5 pour obtenir le même nombre de y dans les deux équations. On obtient le système équivalent $(S): \begin{cases} 4x - 10y = 2 \\ 15x + 10y = 55 \end{cases}$.

2. On additionne les deux équations obtenues afin d'éliminer le nombre de y .
On obtient le système équivalent $(S): \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 19x = 57 \end{cases}$.

3. On résout la deuxième équation pour obtenir la valeur de x . On obtient $(S): \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

4. Il suffit maintenant de substituer x par 3 dans la première équation pour obtenir la valeur de y . On obtient $(S): \begin{cases} 2 \times 3 - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 1 - 6 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

5. Conclusion : le système a une unique solution, le couple $(1;3)$. On note $S = \{(1;3)\}$.

Remarque : Dans la pratique, on rédige cette résolution par une succession de systèmes équivalents :

$$(S): \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y = 2 \\ 15x + 10y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 19x = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} 2 \times 3 - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 1 - 6 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$