Chapitre 14 : Équations de droites et systèmes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

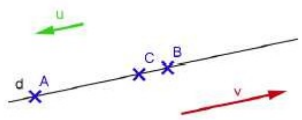
I. Équation cartésienne d'une droite

1. Vecteur directeur d'une droite

Définition : Soit *d* une droite du plan. On appelle **vecteur directeur** de *d* tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la **même direction** que la droite *d*.

Exemple :

- $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC}$ sont des vecteurs directeurs de *d*.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs de *d*.



Remarques :

- *Le choix de deux points distincts quelconques de d définit un vecteur directeur de d.*
- *Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d alors tout vecteur (non nul) colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d. Il existe donc une infinité de vecteurs directeurs d'une même droite.*
- *Le parallélisme de deux droites d et d' se traduit par le fait que tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre.*

Exemple : Une droite (d) passe par les points A(-1;3) et B(1;-1). (d) admet le vecteurs $\overrightarrow{AB}(2;-4)$ pour vecteur directeur.

Exercice 1 :
Soit (d_1) la droite passant par A(-3;3) et B(3 ;-1).
On considère les vecteurs $\vec{u}(3;-2), \vec{v}(-0{,}75;0{,}5)$ et $\vec{w}(1;0{,}6)$.

1. Donner un vecteur directeur de (d_1)
2. Déterminer parmi les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ceux qui sont directeurs de (d_1)

2. Équation cartésienne d'une droite

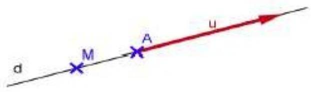
Propriété : Toute droite *d* du plan, rapporté à un repère, admet une équation dite **cartésienne** de la forme ***ax + by + c = 0*** où *a*, *b* et *c* sont des réels avec (*a* ; *b*) ≠ (0 ; 0) .

Point Histoire : Cartésienne est dérivé de Cartesius, nom latin de Descartes et signifie « qui se rapporte à la doctrine de Descartes ».

René Descartes (1596-1650) fut un mathématicien, physicien et philosophe français auquel est attribué la célèbre expression « Je pense donc je suis » (Cogito, ergo sum). Reliant la géométrie et le calcul, il créé la géométrie analytique.

Remarque : (a ; b) ≠ (0 ; 0) signifie qu'au moins un des deux réels a ou b est non nul.

Preuve exigible au programme :
Soit une droite (d) passant par un point $A(x_A;y_A)$ *et de vecteur directeur (non nul)* $\vec{u}(\alpha;\beta)$.
Pour tout point M (x ; y) du plan,



$$M\in(d)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\text{ et }\vec{u}\text{ sont colinéaires}$$
$$M\in(d)\Leftrightarrow(x-x_A)\times\beta-(y-y_A)\times\alpha=0$$
$$M\in(d)\Leftrightarrow x\times\beta-x_A\times\beta-y\times\alpha+y_A\times\alpha=0$$
$$M\in(d)\Leftrightarrow \beta x-\alpha y+(\alpha y_A-\beta x_A)=0\text{ et }(\beta;\alpha)\neq(0;0)\text{ car }\vec{u}\neq\vec{O}$$

Conclusion : (d) a pour équation $ax+by+c=0$ avec $a=\beta;b=-\alpha$ et $c=\alpha y_A-\beta x_A$ #

Remarque : ainsi, $\vec{u}(-b;a)$ *est un vecteur directeur de la droite d.*

Exercice 2 :

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par A(1;3) et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;5)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d ') passant par B(7;-1) et de vecteur directeur $\vec{v}(0;3)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec A(-5;4) et B(-1;1).

Exemple **:** Soit (*d*) la droite passant par *A*(2;3) et dirigée par $\vec{u}(2;5)$.

$$M\in d\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\text{ et }\vec{u}\text{ sont colinéaires}$$
$$M(x;y)\in(d)\Leftrightarrow(x-2)\times5-(y-3)\times2=0$$
$$M(x;y)\in(d)\Leftrightarrow 5x-10-2y+6=0$$
$$M(x;y)\in(d)\Leftrightarrow 5x-2y-4=0$$

Remarque : Une droite (d) admet une infinité d'équations cartésiennes.
En effet, si ax + by + c = 0 est une équation de d, alors pour tout réel k non nul, kax + kby + kc = 0 est également une équation de d.

Propriété réciproque : Le plan étant rapporté à un repère, l'ensemble des points M (x ; y) vérifiant l'équation ***ax* + *by* + *c* = 0** où *a*, *b* et *c* sont des réels avec (*a* ; *b*) ≠ (0 ; 0) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

Preuve exigible au programme :
Le plan est muni d'un repère. Notons $\Gamma=\{M(x;y)\text{ tels que } ax+by+c=0\}$.
Comme $(a;b)\neq(0;0)$ *, on peut supposer* $a\neq0$ *par exemple.*

$$M\in\Gamma\Leftrightarrow ax+by+c=0\Leftrightarrow ax-(-by)+a(\frac{c}{a})=0\Leftrightarrow a(x+\frac{c}{a})-(-by)=0$$

Considérons le point $A(-\frac{c}{a};0)$ *et le vecteur* $\vec{u}(-b;a)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ *a pour coordonnées* $(x+\frac{c}{a};y)$ *donc* $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ *sont colinéaires.*

Γ *est donc la droite passant par A et de vecteur directeur* $\vec{u}$. #

Exemple : $3x + 4y - 10 = 0$ est l'équation d'une droite *d* admettant comme vecteur directeur $\vec{u}(-4;3)$

Cas particuliers :

- *Si a = 0 alors les droites ont des équations de la forme y = k et sont horizontales c'est à dire parallèles à l'axe des abscisses. Le vecteur* $\vec{i}(1;0)$ *est un vecteur directeur.*
- *Si b = 0 alors les droites ont des équations de la forme x = k' et sont verticales c'est à dire parallèles à l'axe des ordonnées. Le vecteur* $\vec{j}(0;1)$ *est un vecteur directeur.*

Exercice 3 :
Pour chacun des cas, déterminer un vecteur directeur de (d) :

(d_1) : $5x - 2y + 1 = 0$	(d_2) : $x - 5 = 0$	(d_3) : $y = 2x + 3$

Propriété : Les droites d'équations $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ et $\boldsymbol{a'x + b'y + c' = 0}$ sont parallèles si et seulement si $\boldsymbol{ab' - a'b = 0}$

Preuve :
Soit (d) : $ax + by + c = 0$ et (d') : $a'x + b'y + c' = 0$
Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-b;a)$ et un vecteur directeur de (d') est $\vec{u'}(-b';a')$.
(d) et (d') sont parallèles si seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $-ba' - a(-b') = 0$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$ #

Exemple : Soit les droites *d* : $2x - y + 3 = 0$, *d* ' : $-4x + 2y + 1 = 0$ et *d*'' : $2x + 3y + 2 = 0$.

- $\vec{u}(1;2)$, $\vec{v}(-2;-4)$ et $\vec{w}(-3;2)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites d, d' et d''
- d et d' sont parallèles car $1\times(-4)-2\times(-2)=-4+4=0$
- d et d'' ne sont pas parallèles car $1\times2-2\times(-3)=2+6=8\neq0$

II. Équation réduite et pente d'une droite

1. Équation réduite d'une droite

Propriété : Toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = m\,x + p$.
Cette équation est appelée **équation réduite** de la droite (d).
Le vecteur $\vec{u}(1;m)$ est directeur de (d).

Preuve : Pour $(a;b)\neq(0;0)$, on considère la droite (d) d'équation cartésienne $ax+by+c = 0$.

- *Pour $b\neq0$, $ax+by+c=0$ équivaut à $by = - a - c$ équivaut à $y = -a/b\ x - c/b$.*
  Ainsi, $ax+by+c=0$ équivaut à $y = m\,x + p$ avec $m = -a/b$ et $p = -c/b$.
  Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-b;a)$ et comme $b\neq0$, $-\frac{1}{b}\vec{u}(1;-\frac{a}{b})$ est aussi directeur de (d) soit $\vec{u}(1;m)$ avec $m=-\frac{a}{b}$.

Pour $x=0$ *, on obtient le point (0;p) sur (d) et sur l'axe des ordonnées.*

- *Pour* $b=0$ *, on ne peut pas exprimer y en fonction de x. La droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées.* #

2. Pente d'une droite

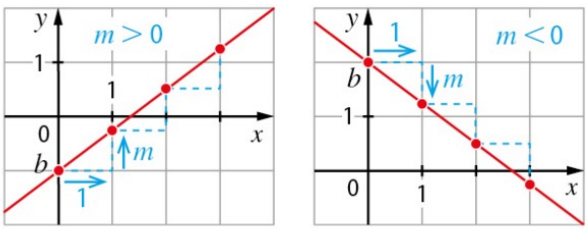
Définition : Soit (d) la droite d'équation réduite y = m x + p.
Le nombre m est appelé pente (ou coefficient directeur) de la droite (d) et le nombre p est l'ordonnée à l'origine.

Exemple : (d) : y= 3 x- 5 a pour coefficient directeur m=3 et pour ordonnée à l'origine p=-5 donc A(0 ;-5) appartient à (d).

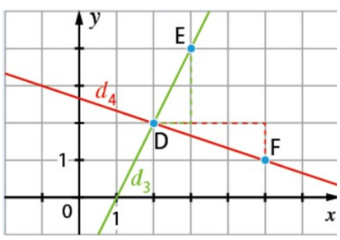
Propriété : Dans un repère, soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points avec $x_A \neq x_B$.
La pente de la droite (AB) est $\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.

Preuve :
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ *deux points avec* $x_A \neq x_B$ *donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc (d) admet une équation réduite de la forme* $y = m x + p$ *.*
Comme A appartient à (d) , on a $y_A = m x_A + p$ *.*
Comme B appartient à (d), on a $y_B = m xB + p$ *.*
Par différence, on obtient $y_B - y_A = m x_B - m x_A = m(x_B - x_A)$ *d'où* $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ avec $x_B \neq x_A$ #

Interprétation graphique



Exercice 4 : Déterminer :
1. La pente m_1 de la droite d_1 passant par A(-4;2) et B(2 ;-3).
2. La pente m_2 de la droite d_2 dont une équation cartésienne est 6x – 4y + 2 = 0
3. Les pentes des droites d_3 et d_4 tracées ci-dessous :



Exercice 5 : Déterminer l'équation réduite des droites :

1. d_1 passant par A(2;3) et de pente -4
2. d_2 passant par A(0;5) et de coefficient directeur 0

III. Systèmes linéaires d'équations

Définition : Un système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues est de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, avec a, b, c, a', b', c' réels et le couple $(x;y)$ des inconnues.

Définition : Résoudre ce système revient à déterminer tous les couples solutions, c'est à dire tous les couples vérifiant à la fois les deux équations du système.

Exemple : On considère le système $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ -4x+5y=-1 \end{cases}$.

Vérifions que le couple (4;3) est une solution de ce système. On a :
$3\times4-2\times3=12-6=6$ et $-4\times4+5\times3=-16+15=-1$ donc le couple (4;3) est bien une solution du système.

IV. Méthode de résolution par substitution

Méthode : Cette méthode consiste à exprimer l'une des deux variables en fonction de l'autre dans l'une des deux équations puis à substituer cette valeur dans la seconde équation : la nouvelle équation obtenue est alors une équation à une inconnue.

Exemple : Résoudre le système $(S):\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.

1. On observe qu'on peut exprimer la variable y en fonction de la variable x à l'aide de la première équation.
2. Le système est alors équivalent au système $(S):\begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.
3. On substitue alors la valeur $y=3x-5$ dans la deuxième équation.
4. On obtient le système équivalent $(S):\begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3(3x-5)=7 \end{cases}$.

5. On résout alors la deuxième équation $(S):\begin{cases} y=3x-5 \\ 11x-15=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=3x-5 \\ 11x=22 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=3x-5 \\ x=2 \end{cases}$.
6. Il suffit maintenant de substituer la valeur $x=2$ dans la première équation pour obtenir la valeur de y . On déduit $(S):\begin{cases} y=3\times 2-5 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$.
7. Conclusion : le système a une unique solution, le couple (2;1). On note $S=\{(2;1)\}$.

Remarque ; Dans la pratique, on rédige cette résolution par une succession de systèmes équivalents :

$$(S):\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3(3x-5)=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=3x-5 \\ 11x-15=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=3x-5 \\ 11x=22 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=3x-5 \\ x=2 \end{cases}$$

V. Méthode de résolution par combinaison

Méthode : Cette méthode consiste à multiplier l'une ou les deux équations par des coefficients bien choisis afin qu'une addition ou une soustraction de deux équations membre à membre permette l'élimination d'une des deux inconnues.

Exemple ; Résoudre le système $(S):\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ par la méthode par combinaisons.

1. On multiplie la première équation par 2 et la seconde par 5 pour obtenir le même nombre de y dans les deux équations. On obtient le système équivalent $(S):\begin{cases} 4x-10y=2 \\ 15x+10y=55 \end{cases}$.
2. On additionne les deux équations obtenues afin d'éliminer le nombre de y .
   On obtient le système équivalent $(S):\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 19x=57 \end{cases}$.
3. On résout la deuxième équation pour obtenir la valeur de x . On obtient $(S):\begin{cases} 2x-5y=1 \\ x=3 \end{cases}$.
4. Il suffit maintenant de substituer x par 3 dans la première équation pour obtenir la valeur de y . On obtient $(S):\begin{cases} 2\times 3-5y=1 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-5y=1 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y=1-6 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$.
5. Conclusion : le système a une unique solution, le couple (1;3). On note $S=\{(1;3)\}$.

Remarque ; Dans la pratique, on rédige cette résolution par une succession de systèmes équivalents :

$$(S):\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x+2y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-10y=2 \\ 15x+10y=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=1 \\ 19x=57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=1 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S):\begin{cases} 2\times 3-5y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-5y=1 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y=1-6 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Exercice 6 : Résoudre par la méthode la plus adaptée, chacun des systèmes suivants :

$$(S):\begin{cases} x-3y-1 \\ -3x+4y=-2 \end{cases} \text{ et } (S'):\begin{cases} 3x+5y=-6 \\ 7x+3y=12 \end{cases}$$

VI. Parallélisme et intersection de deux droites

1. Parallélisme de deux droites

Définition : Deux droites (d) et (d') sont **parallèles** quand elles ont la même direction.

Remarque : deux droites parallèles et non confondues sont dites strictement parallèles.

Propriété : Deux droites (d) et (d') sont **parallèles** si et seulement si deux de leurs **vecteurs directeurs** sont **colinéaires.**

Exemple : Soit (d) : 4x – 2y = 0 et -(d') : -12x + 6y – 3 = 0.
$\vec{u}(2;4)$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}(-6;-12)$ est un vecteur directeur de (d').
$\vec{v}=-3\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (d) et (d') sont parallèles.

Propriété : Deux droites (d) et (d') d'équations réduites y= m x + p et y = m' x + p' sont **parallèles** si et seulement si leurs pentes sont égales c'est à dire si et seulement si **m = m'**.

Preuve :
Soit (d) et (d') deux droites d'équations réduites respectives y = mx + p et y = m'x + p'.
$\vec{u}(1;m)$ *est un vecteur directeur de (d) et* $\vec{u'}(1;m')$ *est un vecteur directeur de (d').*
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ *sont colinéaires .*
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $det(\vec{u},\vec{u}\,')=0$.
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m' \end{vmatrix}=0$
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $1\times m'-m\times 1=0$
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m'=m$ #

Remarques : Deux droites (d) et (d') sont confondues lorsqu'elles ont des équations cartésiennes équivalentes.

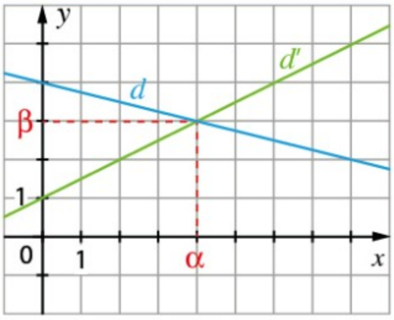
2. Droites sécantes et intersection

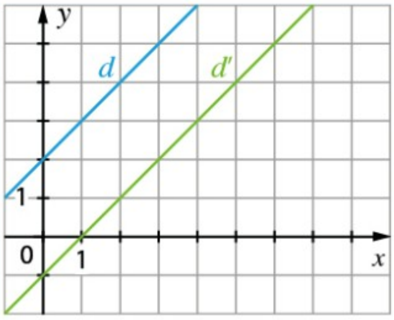
Définition : deux droites non parallèles sont dites **sécantes.**

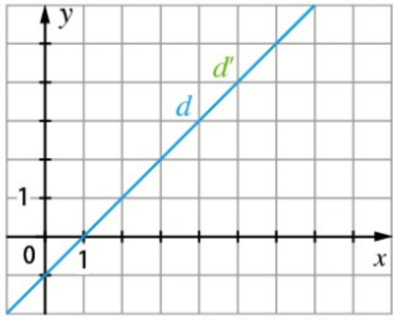
Propriétés: Soit (d) et (d') deux droites du plan d'équations cartésiennes respectives ax + by = c et a'x b' y = c' .
Résoudre le système $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ revient à étudier l'intersection de deux droites du plan.

- Le système (S) a soit une **unique solution** lorsque (d) et (d') sont **sécantes en un seul point**.
- Le système (S) a soit une **infinité de solutions** lorsque (d) et (d') sont **confondues**.
- Le système (S) n'a **aucune solution** lorsque (d) et (d') sont **strictement parallèles**.

d et d' sont **sécantes**. Le système admet une **unique** solution : le couple **(α ; β)**.	d et d' sont **strictement parallèles**. Le système n'admet **aucune** solution.	d et d' sont **confondues**. Le système admet une **infinité** de solutions.







Exercice 7 : Dans chacun des cas suivants, justifiez si les droites (d) et (d') sont parallèles ou sécantes et lorsqu'elles sont sécantes, déterminez les coordonnées de leur point d'intersection.

1. (d) : $3x + y - 1 = 0$ et (d') : $-6x - 2y - 5 = 0$
2. (d) : $y = 2x + 4$ et (d') : $y = -5$
3. (d) : $-3x + 1 = 0$ et (d') : $x = -2$
4. (d) : $x - 3y - 1 = 0$ et (d') : $y = 2x + 3$
5. (d) : $2x - 3y + 4 = 0$ et (d') : $5x + 2y - 9 = 0$
6. (d) : $y = -x - 1$ et (d') : $y = 2x - 7$

Exercice 8 : On considère les droites (d) et (d') d'équations respectives $2x + y = 5$ et $6x - 3y = -3$.

1. Déterminer leur équation réduite
2. A l'aide de votre calculatrice graphique, afficher les droites dans un repère puis lire les coordonnées de leur point d'intersection K.
3. Vérifier, par le calcul, l'exactitude des coordonnées lues.