

**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$ . Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Correction**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$

$f$  est la somme algébrique de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3x^2 + 9x - 6$$

Étude du signe de  $f'(x)$

$\Delta = 9^2 - 4 \times (-3) \times (-6) = 81 - 72 = 9 > 0$  donc l'équation  $f'$  admet deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{9}}{2 \times (-3)} = \frac{-9 - 3}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{9}}{2 \times (-3)} = \frac{-9 + 3}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

De plus,  $a = -3 < 0$ , on a donc le tableau de signe de  $f'$  et de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		-0.5	↗		0

**Exercice 2**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 3x + 2\sqrt{x}$ .

1. Calculer la dérivée de  $f$ .
2. En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Correction**

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) = 3x + 2\sqrt{x}$

$f$  est la somme de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  donc  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = 3 + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $\sqrt{x} > 0$  donc  $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$  donc  $3 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 3 > 0$

On a donc le tableau de variation suivant :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	0	↗

**Exercice 3**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x-1}$ . Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Correction

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x-1}$

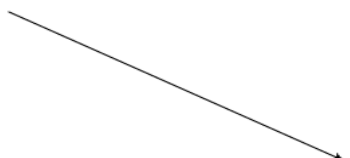
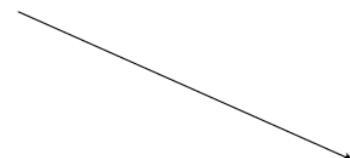
$f$  est le quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

On pose  $u(x) = -x^2 + 2x$  donc  $u'(x) = -2x + 2$  et  $v(x) = x - 1$  donc  $v'(x) = 1$

donc  $f'(x) = \frac{(-2x + 2)(x - 1) - 1 \times (-x^2 + 2x)}{(x - 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 2x - 2 + x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2}$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 4 - 8 = -4 < 0$  De plus  $a = -1 < 0$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-x^2 + 2x - 2 < 0$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(x - 1)^2 \geq 0$ , d'après la règle des signes on a  $f'(x) < 0$

On a donc le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f$			

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x^2}$  et  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

1. Vérifier que  $f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$ .
2. Étudier la sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
3. Construire la courbe représentative de  $f$  sur  $[1; 4]$ .

**Correction**

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x^2}$

$f$  est la somme algébrique de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = 1 + 4 \times \left(\frac{-2}{x^3}\right) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$

Or  $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$

donc pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^3}$

2.

Étude du signe de  $x^2 + 2x + 4$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$  et  $a = 1 > 0$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + 2x + 4 > 0$  et donc ne change pas le signe de  $f'(x)$ .

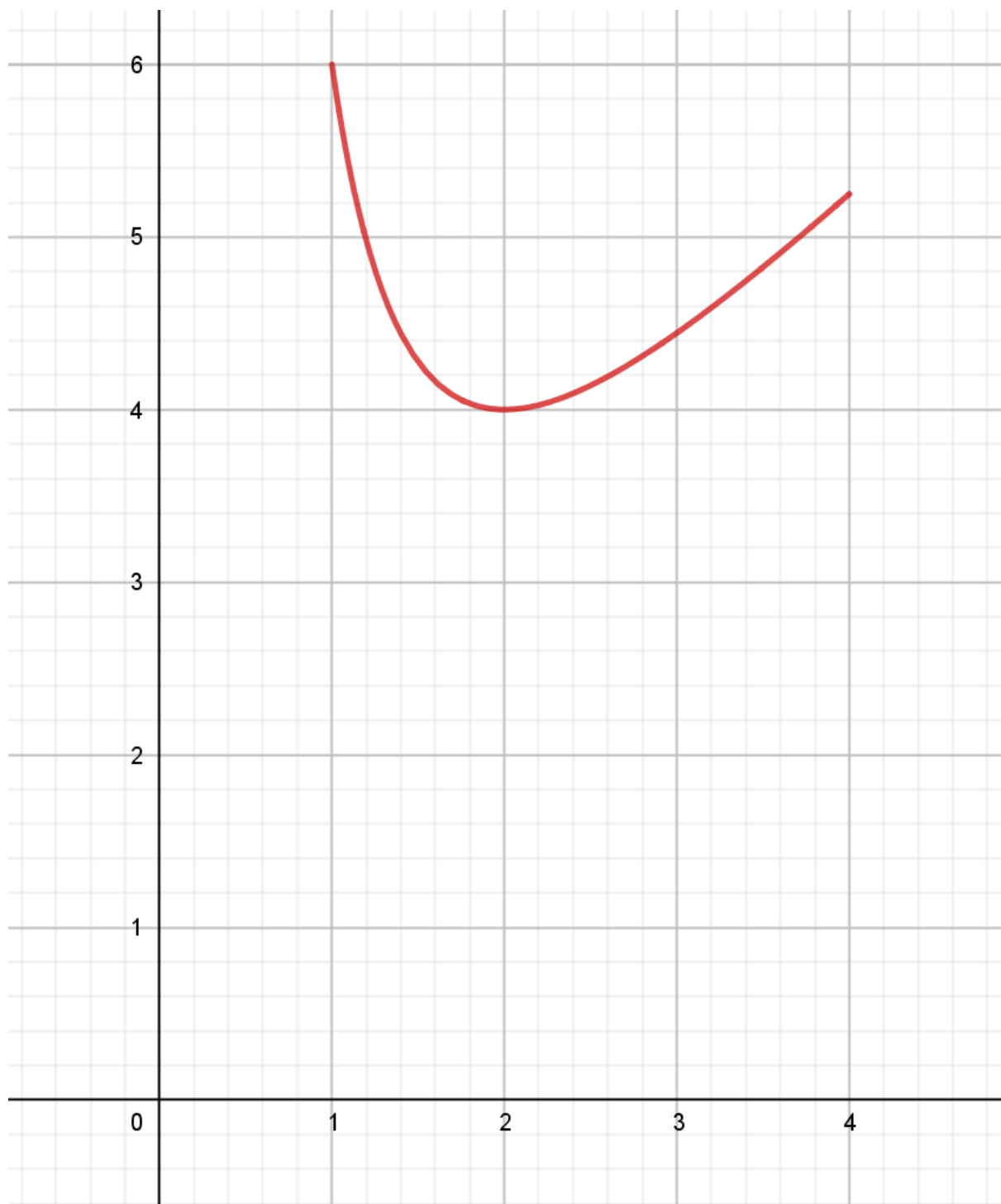
Par conséquent, le signe de  $f'(x)$  dépend du signe de  $x - 2$  et du signe de  $x^3$ .

Or  $x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$  et  $x^3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

On a donc le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x - 2$	-	0	0	+
$x^3$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	-	0	+
$f$	↗		↘ ↗	

3. pp



**Exercice 5**

On veut réaliser un placard ayant la forme d'un parallélépipède droit. Sa largeur et sa profondeur sont égal à  $x$  dm. Sa hauteur est égal à  $12-x$  dm.

1. Déterminer l'expression  $V(x)$  du volume de ce placard en fonction de  $x$ .
2. Déterminer pour quelle valeur de  $x$  le volume de ce placard est maximal.

**Correction**

1.  $V(x) = x \times x \times (12-x) = 12x^2 - x^3$
2. Il faut maintenant étudier les variations de la fonction  $V$ .

$V$  est la somme algébrique de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc  $V$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $V'(x) = 12 \times 2x - 3x^2 = 24x - 3x^2 = 3x(8-x)$

Sur  $[0; +\infty[$ ,  $3x \geq 0$  donc  $V'(x)$  est du signe de  $8-x$ . Or  $8-x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$

Sur  $[0; +\infty[$ , on a donc le tableau de variation suivant :

$x$	0	8	$+\infty$
$V'(x)$	+	0	-
$V$	0	↗ 256 ↘	

Conclusion : le volume maximal du placard est obtenu pour  $x=8$ .

**Exercice 6**

Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par  $x$  le nombre de kilogrammes de truffes traités chaque semaine et par  $f(x)$  le coût total pour la production de  $x$  kg de truffes. Pour ce producteur,  $f(x) = x^3 - 60x^2 + 975x$ .

De plus, chaque kilogramme de truffes conditionné est vendu 450 euros.

1. Exprimer le bénéfice  $B(x)$  réalisé par le fabricant pour  $x$  kg de truffes conditionnés et vendus.
2. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du fabricant est-il maximal ?
3. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

**Correction**

Pour  $x \in [0; 45]$ ,

$$B(x) = 450x - f(x) = 450x - (x^3 - 60x^2 + 975x) = -x^3 + 60x^2 + 450x - 975x = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

Étude des variations de la fonction  $B$ .

$B$  est la somme algébrique de fonctions dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc  $B$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donc dérivable sur  $[0; 45]$ .

$$\forall x \in [0; 45], B'(x) = -3x^2 + 60 \times 2x - 525 = -3x^2 + 120x - 525$$

Étude du signe de  $B'(x)$

$\Delta = (120)^2 - 4 \times (-3) \times (-525) = 8100 > 0$  donc l'équation  $B'$  admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-120 - \sqrt{8100}}{(-6)} = \frac{-120 - 90}{(-6)} = 35 \text{ et } x_2 = \frac{-120 + \sqrt{8100}}{(-6)} = \frac{-120 + 90}{(-6)} = 5$$

De plus  $a = -3 < 0$  donc on obtient le tableau de signe et de variation suivant :

$x$	0	5	35	45
$B'(x)$		-	0	+
$B$	0	↘	-1250	↗
			12250	↘
				6750

Conclusion : Le bénéfice est donc maximal pour  $x = 35$  et il est de 12 250€.