

Question de cours

1. Rédiger la démonstration du théorème de dérivation de la fonction carré.
2. Rédiger l'énoncé et la démonstration du théorème de dérivation du produit de deux fonctions.

Correction

1. Démontrons que la fonction carré est dérivable sur \mathbb{R} et calculons sa dérivée.

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On a :

$$r(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

On déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h = 2x \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable sur \mathbb{R}
et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$

2. Démontrons que $(u \times v)' = u'v + v'u$

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ tel que $x+h \in I$. On a :

$$r(h) = \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$r(h) = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$r(h) = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$r(h) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} u(x)$$

On déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} u(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

donc uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$

Exercice 1

Dériver la fonction suivante en précisant sur quel ensemble elle est dérivable.

$f_1(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$	$f_2(x) = \frac{3x^2 - 4x}{2}$	$f_3(x) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 - 2)$
$f_4(x) = (2x - \sqrt{x})(x + 4)$	$f_5(x) = \frac{1}{1 - 4x}$	$f_6(x) = \frac{-3}{2x - 1}$
$f_7(x) = \frac{2x - 1}{3x + 2}$	$f_8(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$	$f_9(x) = (-5x^2 + 1)^2$

Correction

- f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme. Pour tout réel x , on a :

$$f'_1(x) = 4 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 3 = 12x^2 + 4x - 3$$
- $f_2(x) = \frac{3x^2 - 4x}{2} = \frac{3}{2}x^2 - 2x$
 f_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme. Pour tout réel x , on a :

$$f'_2(x) = \frac{3}{2} \times 2x - 2 = 3x - 2$$
- f_3 est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.
 $f_3 = uv$ donc $f'_3 = u'v + v'u$ avec $u(x) = \sqrt{x} + 1$ et $v(x) = x^2 - 2$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
 et $v'(x) = 2x$

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f'_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2 - 2) + 2x \times (\sqrt{x} + 1) = \frac{x^2 - 2 + 4x^2 + 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 4x\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x}}$$

- f_4 est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.
 $f_4 = uv$ donc $f'_4 = u'v + v'u$ avec $u(x) = 2x - \sqrt{x}$ et $v(x) = x + 4$

$$u'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
 et $v'(x) = 1$

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f'_4(x) = \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times (x + 4) + 1 \times (2x - \sqrt{x}) = \frac{(4\sqrt{x} - 1)(x + 4)}{2\sqrt{x}} + \frac{(2x - \sqrt{x})(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$f'_4(x) = \frac{4x\sqrt{x} + 16\sqrt{x} - x - 4 + 4x\sqrt{x} - 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{8x\sqrt{x} + 16\sqrt{x} - 3x - 4}{2\sqrt{x}}$$

- f_5 est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{1}{4}\}$ comme fonction inverse d'une fonction u dérivable sur \mathbb{R} et qui s'annule uniquement en $x = \frac{1}{4}$.

$f_5 = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 - 4x$ d'où $u'(x) = -4$

$f'_5 = \frac{-u'}{u^2}$ d'où pour tout réel $x \neq \frac{1}{4}$, on a $f'_5(x) = \frac{-(-4)}{(1-4x)^2} = \frac{4}{(1-4x)^2}$.
- $f_6(x) = \frac{-3}{2x-1} = -3 \times \frac{1}{2x-1}$ donc f_6 est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ comme produit du réel (-3) par une fonction inverse u dérivable sur et qui s'annule uniquement en $x = \frac{1}{2}$.

$f_6 = \frac{-3}{u}$ avec $u(x) = 2x-1$ d'où $u'(x) = 2$

$f'_6 = (-3) \times \frac{-u'}{u^2} = \frac{3u'}{u^2}$ d'où pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$, on a $f'_6(x) = \frac{6}{(2x-1)^2}$.
- f_7 est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur s'annule uniquement en $x = -\frac{2}{3}$.

$f_7 = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-1$ et $v(x) = 3x+2$

$f'_7 = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq -\frac{2}{3}$, on a :

$f'_7(x) = \frac{2(3x+2) - 3(2x-1)}{(3x+2)^2} = \frac{6x+4-6x+3}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$
- f_8 est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur s'annule uniquement en $x = \frac{3}{2}$.

$f_8 = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et $v(x) = 2x - 3$

$u'(x) = 6x - 4$ et $v'(x) = 2$

$f'_8 = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq \frac{3}{2}$, on a :

$f'_8(x) = \frac{(6x-4)(2x-3) - 2(3x^2-4x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{12x^2 - 18x - 8x + 12 - 6x^2 + 8x - 2}{(2x-3)^2}$

$f'_8(x) = \frac{6x^2 - 18x + 10}{(2x-3)^2}$

- f_9 est dérivable sur \mathbb{R} comme carré d'une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
 $f_9 = u^2$ avec $u(x) = (-5x^2 + 1)$ d'où $u'(x) = -10x$
 $f'_9 = 2 \times u' \times u$. pour tout réel x , on a :
 $f'_9(x) = 2 \times (-10x) \times (-5x^2 + 1) = -20x(-5x^2 + 1)$

Exercice 2

Déterminer une équation de la tangente T_a à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1. $f_1(x) = 3x^2 - x + 1$ avec $a = 1$
2. $f_2(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ avec $a = 3$
3. $f_3(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ avec $a = 9$

Correction

1. f_1 est dérivable sur \mathbb{R} donc dérivable en $a = 1$ comme fonction polynôme.
 $f_1(1) = 3 \times 1^2 - 1 + 1 = 3$ et
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'_1(x) = 6x - 1$ donc $f'_1(1) = 5$ d'où
 $T_1: y = f'_1(1)(x - 1) + f_1(1) = 5(x - 1) + 3 = 5x - 5 + 3 = 5x - 2$

Conclusion : $T_1: y = 5x - 2$

2. f_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur s'annule uniquement en $x = 2$ donc f_2 est dérivable en $x = 3$.

$$f_2(3) = \frac{2 \times 3 + 1}{3 - 2} = 7 \text{ et}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f'_2(x) = \frac{2 \times (x - 2) - 1 \times (2x + 1)}{(x - 2)^2} = \frac{2x - 4 - 2x - 1}{(x - 2)^2} = \frac{-5}{(x - 2)^2} \text{ donc}$$

$$f'_2(3) = \frac{-5}{(3 - 2)^2} = -5 \text{ d'où}$$

$$T_3: y = f'_2(3)(x - 3) + f_2(3) = -5(x - 3) + 7 = -5x + 15 + 7 = -5x + 22$$

Conclusion : $T_3: y = -5x + 22$

3. f_3 est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ donc f_3 est dérivable en $a = 9$.

$$f_3(9) = \frac{\sqrt{9}}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ et}$$

$$\forall x > 0, f'_3(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - 1 \times \sqrt{x}}{x^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x}}{x^2} = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2} \text{ donc}$$

$$f'_3(9) = \frac{-\sqrt{9}}{2 \times 9^2} = \frac{-3}{2 \times 81} = \frac{-1}{54} \text{ d'où}$$

$$T_9: y = f'_3(9)(x-9) + f_3(9) = \frac{-1}{54}(x-9) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{54}x + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{54}x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } T_9: y = -\frac{1}{54}x + \frac{1}{2}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x}$. On note C_f sa courbe.

- Déterminer les points éventuels de C_f où la tangente est horizontale.
- Déterminer les points éventuels de C_f où le coefficient directeur de la tangente vaut 2.
- Déterminer les points éventuels de C_f où la tangente est parallèle à (d): $y = \frac{-2}{3}x - 5$.

Correction

- f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* . Pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{(-2x+2) \times x - 1 \times (-x^2 + 2x - 1)}{x^2} = \frac{-2x^2 + 2x + x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

C_f admet une tangente horizontale en $a \neq 0$ si et seulement si $f'(a) = 0$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = 1$$

Conclusion : C_f admet une tangente horizontale en $a = -1$ et en $a = 1$

- $f'(a) = 2 \Leftrightarrow \frac{-a^2 + 1}{a^2} = 2 \Leftrightarrow -a^2 + 1 = 2a^2 \Leftrightarrow 3a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ ou $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Conclusion : C_f admet une tangente de coefficient directeur égal à 2 en

$$a = \frac{-\sqrt{3}}{3} \text{ et en } a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- C_f admet une tangente parallèle à (d) en $a \neq 0$ si et seulement si $f'(a) = \frac{-2}{3}$

$$f'(a) = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow \frac{-a^2 + 1}{a^2} = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow -3a^2 + 3 = -2a^2 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = -\sqrt{3} \text{ ou } a = \sqrt{3}$$

Conclusion : C_f admet une tangente parallèle à (d) en $a = -\sqrt{3}$ et en $a = \sqrt{3}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de f .

Correction

1. f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.
 $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$
2. $6 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x) = x^2 + x - 2$.
 Or $x_1 = 1$ est racine évidente de $g(x)$ donc la deuxième racine x_2 vérifie
 $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = -2$
 Or le coefficient des x^2 vaut $a = 1 > 0$.
 On déduit le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

3. On déduit le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			\nearrow	13	\searrow	-14	\nearrow