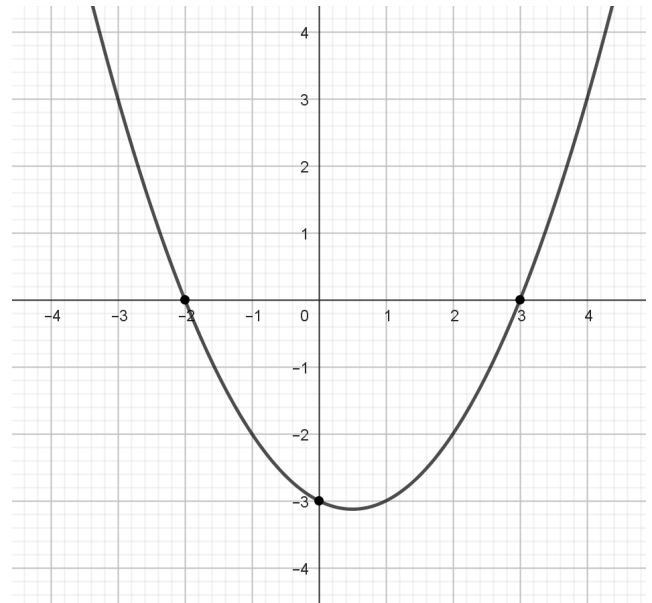


La calculatrice est autorisée

Exercice 1

On considère une fonction du second degré f dont la courbe C_f est donnée ci-contre.



1. Montrer que la forme factorisée de f est donnée par $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-3)$. Justifier.
2. En déduire que $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$.
3. Déterminer la forme canonique de f à l'aide de la méthode de votre choix.

Exercice 2

On considère une fonction du second $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	↗		↘

1. On rappelle que la forme canonique de f s'écrit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
 - (a) Rappeler la formule du discriminant Δ de f .
 - (b) Préciser les formules de α et de β en fonction de a, b, c, Δ .
 - (c) A l'aide du tableau de variations, préciser les coordonnées du sommet S de la parabole C_f .
 - (d) En déduire l'expression de la forme canonique de f en fonction de a .
2. On avait noté la valeur de $f(0)$ mais celle-ci a été effacée. On hésite entre 1 et 7. Justifier que l'une de ces deux valeurs est impossible.
3. En déduire la valeur de a .
4. Donner l'expression développée de $f(x)$.

Exercice 3

Pour chacune des suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) ci-dessous, calculer les trois premiers termes de la suite, établir une conjecture sur les variations de la suite puis démontrer cette conjecture.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 2n + 3$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{n+1}$
3. $w_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{2w_n + n}{2}$

Exercice 4

Une entreprise d'impression de photos propose un abonnement annuel à ses clients qui coûte 45€.

Avec cet abonnement, le client paye 5 centimes par photo qu'il veut imprimer.

On note u_n le prix que paye le client pour l'abonnement et l'impression de n photos.

1. Quel prix le client va-t-il payer pour imprimer 100 photos ?
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer le nombre de photos que le client pourra imprimer pour 98€. Justifier.

Exercice 5

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0=3, u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{2} \text{ et } v_0=1, v_{n+1}=\frac{3v_n+u_n}{3}$$

1. Calculer les trois premiers termes de chacune des deux suites.
On donnera les résultats sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.
2. On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
Montrer que (u_n) et (v_n) sont strictement croissantes.

Correction

Exercice 1

1. -2 et 3 sont deux racines de f , fonction polynôme du second degré, donc sa forme factorisée est du type $f(x) = a(x+2)(x-3)$. Or, $f(0) = -3 \Leftrightarrow a \times 2 \times (-3) = -3 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Conclusion : La forme factorisée de f est $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-3)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-3) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2x - 6) = \frac{1}{2}(x^2 - x - 6) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{2}(x^2 - x) - 3 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - 3$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - 3 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} - \frac{24}{8}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

Exercice 2

1. (a) $\Delta = b^2 - 4ac$

(b) $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-\Delta}{4a}$

(c) $S(3; 5)$

(d) On déduit la forme canonique de f , $f(x) = a(x-3)^2 + 5$

1. f a un maximum en $\alpha = 3$ qui vaut $\beta = 5$ donc $f(0) < 5$ donc la valeur $f(0) = 7$ est impossible.

2. On déduit que $f(0) = 1$.

3. $f(0) = 1 \Leftrightarrow a \times (0-3)^2 + 5 = 1 \Leftrightarrow 9a + 5 = 1 \Leftrightarrow 9a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{9}$

4. On déduit que, pour tout réel x , $f(x) = -\frac{4}{9}(x-3)^2 + 5$.

$$f(x) = -\frac{4}{9}(x-3)^2 + 5 = -\frac{4}{9}(x^2 - 6x + 9) + 5 = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{24}{9}x - 4 + 5 = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 1$$

Exercice 3

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 2n + 3$. On a :

$$u_0 = 0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3; u_1 = 1^2 + 2 \times 1 + 3 = 6 \text{ et } u_2 = 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$$

Conjecture : (u_n) semble croissante.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 + 2(n+1) + 3] - (n^2 + 2n + 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 + 3) - (n^2 + 2n + 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 4n + 6 - n^2 - 2n - 3$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 3$$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $2n + 3 \geq 3 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{n+1}$. On a :

$$v_0 = \frac{2}{0+1} = 2; v_1 = \frac{2}{1+1} = 1 \text{ et } v_2 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

Conjecture : (v_n) semble décroissante.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)+1} - \frac{2}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1) - 2(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+2-2n-4}{(n+1)(n+2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $(n+1)(n+2) > 0$ et $-2 < 0$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante.

3. $w_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{2w_n + n}{2}$. On a :

$$w_0 = 3; w_1 = \frac{2w_0 + 0}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \text{ et } w_2 = \frac{2w_1 + 1}{2} = \frac{2 \times 3 + 1}{2} = \frac{7}{2}$$

Conjecture : (w_n) semble croissante.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2w_n + n}{2} - w_n = \frac{n}{2}$$

Or, $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $w_{n+1} - w_n \geq 0$ donc (w_n) est croissante.

Exercice 4

1. $u_{100} = 0,05 \times 100 + 45 = 5 + 45 = 50 \text{ €}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0,05 \times n + 45 = 0,05n + 45$.
3. $u_n = 98 \Leftrightarrow 0,05n + 45 = 98 \Leftrightarrow 0,05n = 53 \Leftrightarrow n = \frac{53}{0,05} = \frac{53}{\frac{5}{100}} = \frac{53 \times 100}{5} = 53 \times 20 = 1060$

Conclusion : Le client pourra imprimer 1060 photos pour 98€.

Exercice 5

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3, u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{2} \text{ et } v_0 = 1, v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{3}$$

1. $u_0 = 3$ et $v_0 = 1$
 $u_1 = \frac{2 \times 3 + 1}{2} = \frac{7}{2}$ et $v_1 = \frac{3 \times 1 + 3}{3} = \frac{6}{3} = 2$
 $u_2 = \frac{2 \times \frac{7}{2} + 2}{2} = \frac{9}{2}$ et $v_2 = \frac{3 \times 2 + \frac{7}{2}}{3} = \frac{6 + \frac{7}{2}}{3} = \frac{\frac{19}{2}}{3} = \frac{19}{6}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{2} - u_n = u_n + \frac{v_n}{2} - u_n = \frac{v_n}{2}$
 Or, $v_n > 0$ donc $\frac{v_n}{2} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

 Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n + u_n}{3} - v_n = v_n + \frac{u_n}{3} - v_n = \frac{u_n}{3}$
 Or, $u_n > 0$ donc $\frac{u_n}{3} > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ donc (v_n) est strictement croissante.