Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer tous les entiers naturels n tels que :

1. n divise 2n-7
2. n+9 divise n-2

Exercice 2

1. Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours divisible par trois.
2. Démontrer que le produit de deux nombres impairs est un toujours nombre impair.

Exercice 3

Soient $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$. Démontrer que $13|(8a+5b)\Leftrightarrow 13|(5a+8b)$.

Correction

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $n | n$ et $n | (2n-7)$ donc $n | 2n-(2n-7)$ donc $n | 7$ donc $n \in \{1 ; 7\}$

   Réciproquement
   Si $n=1$ alors $2n-7=-5$. Or, $1 | -5$ donc 1 est solution.
   Si $n=7$ alors $2n-7=2\times 7-7=7$. Or, $7 | 7$ donc 7 est solution.

   Conclusion : S = {1 ; 7}

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $(n+9) | (n+9)$ et $(n+9) | (n-2)$ donc $(n+9) | (n+9)-(n-2)$ donc $(n+9) | 11$

   Or, les diviseurs de 11 sont -11 ; -1 ; 1 et 11.
   On déduit que $n+9=-11$ ou $n+9=-1$ ou $n+9=1$ ou $n+9=11$
   D'où $n=-20$ ou $n=-10$ ou $n=-8$ ou $n=2$
   Or, $n \in \mathbb{N}$ donc la seule solution possible est $n=2$.

   Réciproquement
   Si $n=2$ alors $n+9=11$ et $n-2=0$. Or, $11 | 0$ donc 2 est solution.

   Conclusion : S = {2}

Exercice 2

1. Soient $n-;n$ et $n-1$ avec $n \in \mathbb{Z}$ trois entiers consécutifs.
   On a $(n-1)+n+(n+1)=3n$. Or $3n$ est divisible par 3.

   Conclusion : la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

2. Soient n et n' deux nombres impairs alors il existe deux entiers k et k' et tels que
   $n=2k+1$ et $n'=2k'+1$. On a alors
   $n\times n'=(2k+1)\times(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1=2(2kk'+k+k')+1$.
   Or $2kk'+k+k'$ est un entier donc $n\times n'=2k''+1$ avec $k''=2kk'+k+k'$ donc impair.

   Conclusion : le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

Exercice 3

- Supposons que $13 | (8a+5b)$. Or $13 | (13a+13b)$.
  On déduit que $13 | (13a+13b)-(8a+5b)$ donc $13 | (5a+8b)$.

- Supposons que $13 | (5a+6b)$. Or $13 | (13a+13b)$.
  On déduit que $13 | (13a+13b)-(5a+8b)$ donc $13 | (8a+5b)$.

Conclusion : $13 | (8a+5b) \Leftrightarrow 13 | (5a+8b)$