

## La calculatrice est interdite

## Exercice 1

1. Que peut-on dire du carré d'un nombre impair ? Démontrer votre conjecture.
2. Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $12n+7$  divise  $3n+1$ .

## Exercice 2

On considère les nombres complexes  $z_1=2-3i$  et  $z_2=-2+i$ . Calculer

$z_1+z_2$

$z_1-z_2$

$z_1^2-z_2^2$

$z_1 \times z_2$

$z_2^5$

## Exercice 3

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(2\sqrt{3} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{2}\right) \quad z_2 = (1-2i)^5$$

## Exercice 4

Calculer, lorsqu'ils sont définis, les produits  $AB$  et  $BA$  ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

## Correction

## Exercice 1

1.  $(-3)^2 = 9$  est impair ;  $1^2 = 1$  est impair ;  $5^2 = 25$  est impair

Conjecture : la carré d'un nombre impair semble impair.

Démonstration : soit  $n=2k+1$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  un nombre impair. On a :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2K + 1 \text{ avec } K = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z} \text{ donc } n^2 \text{ est impair.}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$12 \mid n+7 \text{ et } 12 \mid n+7 \Rightarrow 12 \mid n+7 \mid 3 \text{ . Or, les diviseurs de 3 sont } \{-3 ; -1 ; 1 ; 3\}.$$

$$\text{donc } 12n+7 \in \{-3 ; -1 ; 1 ; 3\} \text{ donc } n \in \left\{ \frac{-3-7}{12} ; \frac{-1-7}{12} ; \frac{1-7}{12} ; \frac{3-7}{12} \right\}$$

$$\text{donc } 12n+7 \in \left\{ -\frac{10}{12} ; -\frac{8}{12} ; -\frac{6}{12} ; -\frac{4}{12} \right\} \text{ donc } n \in \left\{ -\frac{5}{6} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{Or, } \frac{-5}{6} \notin \mathbb{Z} ; -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} ; -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} ; -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$$

Conclusion :  $S = \emptyset$ .

## Exercice 2

On considère les nombres complexes  $z_1 = 2 - 3i$  et  $z_2 = -2 + i$ . Calculer

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-2 + i) = -2i$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (-2 + i) = 2 - 3i + 2 - i = 4 - 4i = 4(1 - i)$$

$$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 4(1 - i)(-2i) = -8i(1 - i) = -8i + 8i^2 = -8 - 8i$$

$$z_1 \times z_2 = (2 - 3i)(-2 + i) = -4 + 2i + 6i + 3 = -1 + 8i$$

$$z_2^5 = (-2 + i)^5 = (-2)^2 + 5 \times (-2)^4 \times i + 10 \times (-2)^3 \times i^2 + 10 \times (-2)^2 \times i^3 + 5 \times (-2) \times i^4 + i^5$$

$$z_2^5 = -32 + 80i + 80 - 40i - 10 + i = 38 + 41i$$

Triangle de Pascal pour  $n = 5$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

## Exercice 3

$$z_1 = (2\sqrt{3} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{2}) = 2\sqrt{3} - i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2i\sqrt{2} = (2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{-\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2})$$

$$z_1 = (\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}) + i(\frac{-\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = (1 - 2i)^5 = 1^5 - 5 \times 1^4 \times (2i) + 10 \times 1^3 \times (2i)^2 - 10 \times 1^2 \times (2i)^3 + 5 \times 1^1 \times (2i)^4 - (2i)^5$$

$$z_2 = 1 - 10i - 40 + 80i + 80 - 32i$$

$$z_2 = 41 + 38i$$

**Exercice 4**

$$A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$$

Le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$  donc le produit  $AB$  est calculable.

Le nombre de colonnes de  $B$  n'est pas égal au nombre de lignes de  $A$  donc le produit  $BA$  n'est pas calculable.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$