Exercice 1

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par $u_n=n^2+2n$. Étudier les variations de (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie par son premier terme $v_0=1$ et la relation $v_{n+1}=(v_n+\frac{1}{2})^2$ pour tout entier naturel *n*. Étudier les variations de (v_n) .
3. Soit (w_n) la suite définie par son premier terme $w_0=0$ et la relation $w_{n+1}=w_n+3n$ pour tout entier naturel n . Étudier les variations de (w_n) .

Correction

1. $u_0=0$, $u_1=3$ et $u_2=8$: la suite semble croissante.
   Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x$.
   f est une fonction polynôme du 2nd degré telle que $a=1>0$ donc *f* est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$ avec $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$ donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
   Ou bien
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+2(n+1)-(n^2+2n)=n^2+2n+1+2n+2-n^2-2n=2n+3>0$
   donc (u_n) est strictement croissante.

2. $v_0=1$, $v_1=\frac{9}{4}$ et $v_2=\frac{121}{16}$: la suite semble croissante.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=(v_n+\frac{1}{2})^2-v_n=v_n^2+v_n+\frac{1}{4}-v_n=v_n^2+\frac{1}{4}>0$ donc la suite (v_n) est croissante.

3. $w_0=0$, $w_1=3$ et $w_2=9$: la suite semble croissante.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}-w_n=w_n+3n-w_n=3n$
   Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 0$ donc $3n\geq 0$ donc $w_{n+1}-w_n\geq 0$ donc $w_{n+1}\geq w_n$ donc la suite (w_n) est croissante.

Exercice 2

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = n + (-1)^n$.
   Étudier les variations de (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = 5n^2 - n + 2$.
   Étudier les variations de (v_n) .
3. Soit (w_n) la suite définie par son premier terme $w_1 = -2$ et la relation $w_{n+1} = w_n - \dfrac{1}{n^2}$ pour tout entier naturel non-nul *n*. Étudier les variations de (w_n) .

Correction

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$ on a donc $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$: La suite n'est pas monotone.
2. $v_0 = 2$, $v_1 = 6$ et $v_2 = 20$: la suite semble croissante.
   Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - x + 2$.
   $f(x) = 5(x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}) = 5[(x - \frac{1}{10})^2 - \frac{1}{100} + \frac{2}{5}] = 5(x - \frac{1}{10})^2 + \frac{39}{20}$, de plus $a = 5 > 0$
   donc *f* est strictement croissante sur $[\frac{1}{10}; +\infty[$ donc la suite (v_n) est au moins strictement croissante à partir du rang $n = 1$.
   Or $v_0 = 2$ et $v_1 = 6$ donc $v_0 < v_1$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$
   donc la suite (v_n) est strictement croissante.
   Ou bien
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $v_{n+1} - v_n = 5(n+1)^2 - (n+1) + 2 - (5n^2 - n + 2) = 5(n^2 + 2n + 1) - n - 1 + 2 - 5n^2 + n - 2$
   $v_{n+1} - v_n = 5n^2 + 10n + 5 - n - 1 + 2 - 5n^2 + n - 2 = 10n + 4 > 0$ donc la suite (v_n) est strictement croissante.
3. $w_1 = -2$, $w_2 = -3$ et $w_3 = \dfrac{-13}{4}$: la suite semble décroissante.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = w_n - \dfrac{1}{n^2} - w_n = \dfrac{-1}{n^2} < 0$
   donc la suite (w_n) est strictement décroissante.

Exercice 3

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non-nul *n* par $u_n=\frac{-3}{n}+1$.
   Étudier les variations de (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie par son premier terme $v_0=3$ et la relation $v_{n+1}=\frac{v_n}{n+2}$ pour tout entier naturel *n*. On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n>0$.
   Étudier les variations de (v_n) .
3. Soit (w_n) la suite définie par son premier terme $w_0=3$ et la relation $w_{n+1}=3w_n^3+w_n$ pour tout entier naturel *n*. On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n>0$.Étudier les variations de (w_n) .

Correction

1. $u_1=\frac{-3}{1}+1=-3+1=-2$, $u_2=\frac{-3}{2}+1=\frac{-1}{2}$ et $u_3=\frac{-3}{3}+1=-1+1=0$
   donc la suite semble croissante. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
   $$u_{n+1}-u_n=(\frac{-3}{(n+1)}+1)-(\frac{-3}{n}+1)=\frac{-3}{(n+1)}+\frac{3}{n}=\frac{-3n+3(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-3n+3n+3}{n(n+1)}=\frac{3}{n(n+1)}$$
   donc $u_{n+1}-u_n>0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. $v_0=3$, $v_1=\frac{3}{2}$ et $v_2=\frac{1}{2}$: la suite semble décroissante.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=\frac{v_n}{n+2}-v_n=\frac{v_n}{n+2}-\frac{(n+2)v_n}{n+2}=\frac{v_n(1-n-2)}{n+2}=\frac{-v_n(n+1)}{n+2}$
   Or, $\forall n\in\mathbb{N}, v_n>0$ et $\frac{n+1}{n+2}>0$ donc $\frac{-v_n(n+1)}{n+2}$ donc $v_{n+1}-v_n<0$ la suite (v_n) est strictement décroissante.

3. $w_0=2$, $w_1=2-\sqrt{7}\approx-0{,}65$ et $w_2\approx-2{,}49$: la suite semble décroissante.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}-w_n=w_n-\sqrt{w_n^2+3}-w_n=-\sqrt{w_n^2+3}<0$ donc la suite (w_n) est strictement décroissante

Exercice 4
Une ludothèque possède 100 jeux de société en 2019. Chaque année, elle donne 5% de ses jeux à une œuvre de charité et décide d'acheter 10 nouveaux jeux.

1. Combien aura-t-elle de jeux en 2020 ?
2. On note u_n le nombre de jeux de société de la ludothèque en 2019 + *n*. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Combien aura-t-elle de jeux en 2022 ?

Correction

1. $100\times(1-\frac{5}{100})+10=95+10=105$. Elle aura 105 jeux en 2020.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n\times(1-\frac{5}{100})+10=0{,}95u_n+10$
3. 2022 correspond à $n=3$ et $u_3=114{,}2625$: elle aura environ 114 jeux.