

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - x$.

1. A l'aide de la définition du nombre dérivé, déterminer $f'(1)$.
2. Retrouver votre résultat à l'aide de la fonction dérivée.
3. En déduire l'équation réduite de sa tangente en $x=1$?

Correction

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et $1+h$ vaut :

$$r(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{((1+h)^2 - (1+h)) - (1^2 - 1)}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1 - h}{h} = \frac{h^2 + h}{h} = h + 1$$

$$\text{d'où } \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} h + 1 = 1$$

Conclusion : f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

2. f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x - 1$ donc $f'(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$.

3. L'équation de T_1 est donnée par

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 1 \times (x - 1) + 0$$

$$y = x - 1$$

Conclusion : $T_1 : y = x - 1$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

1. A l'aide de la définition du nombre dérivé, déterminer $f'(-1)$.
2. Retrouver votre résultat à l'aide de la fonction dérivée.
3. En déduire l'équation réduite de sa tangente en $x = -1$?

Correction

1. Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre -1 et $-1+h$ vaut :

$$r(h) = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\left(\frac{1}{-1+h-2} - \frac{1}{-1-2}\right)}{h} = \frac{\left(\frac{1}{h-3} - \frac{1}{-3}\right)}{h} = \frac{-3-h+3}{-3h(h-3)}$$

$$r(h) = \frac{-h}{-3h(h-3)} = \frac{1}{3(h-3)}$$

$$\text{d'où } \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3(h-3)} = \frac{-1}{9}$$

Conclusion : f est dérivable en -1 et $f'(-1) = \frac{-1}{9}$.

2. $f = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = x-2$ donc $u'(x) = 1$

$$f' = \frac{-u'}{u^2} \text{ donc } f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} \text{ donc } f'(-1) = \frac{-1}{(-1-2)^2} = \frac{-1}{9}$$

3. L'équation de T_{-1} est donnée par

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$y = \frac{-1}{9} \times (x+1) + \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$y = \frac{-1}{9}x - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{-1}{9}x - \frac{4}{9}$$

Conclusion : $T_1 : y = \frac{-1}{9}x - \frac{4}{9}$

Exercice 3

Dans un repère orthonormé, construire la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 1 \text{ et sa tangente au point d'abscisse } x = 2 .$$

Vous justifierez rigoureusement vos constructions.

Correction

f est une fonction polynôme du 2nd degré telle que $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

$$f(x) = 2(x^2 - 2x) - 1 = 2((x-1)^2 - 1^2) - 1 = 2(x-1)^2 - 2 - 1 = 2(x-1)^2 - 3$$

C_f admet donc le point $S(1; -3)$ pour sommet et l'axe $x=1$ pour axe de symétrie.

Les points $A(2; -1); B(2; 5)$ et $C(4; 15)$ appartiennent à C_f .

Avec ces éléments, on peut ainsi construire la parabole C_f .

f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x - 4$ donc

$f'(2) = 4$ et $f(2) = -1$. On déduit que la tangente T_2 à C_f a pour équation :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y = 4(x-2) - 1$$

$$y = 4x - 9$$

Conclusion : $T_2 : y = 4x - 9$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

On note C_f sa courbe représentative et T_1 sa tangente au point d'abscisse $x = 1$.

1. Déterminer l'équation réduite de T_1 .
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = (x - 1)^3$
3. En déduire la position relative de C_f par rapport à T_1 .
4. Construire C_f et T_1 sur votre calculatrice et vérifier vos résultats.

Correction

1. f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} .

On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f'(1) = -3$ et $f(1) = -1$.

La tangente T_1 à C_f admet pour équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -3(x - 1) - 1$$

$$y = -3x + 3 - 1$$

$$y = -3x + 2$$

Conclusion : $T_1 : y = -3x + 2$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 1 + 3x - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \text{ et}$$

$$(x - 1)^3 = (x - 1)^2(x - 1) = (x^2 - 2x + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = (x - 1)^3$

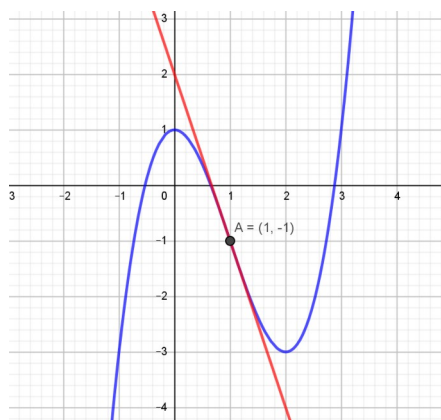
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) - (-3x + 2) = (x^3 - 3x^2 + 1) - (-3x + 2) = (x - 1)^3$$

Or $(x - 1)^3$ est du signe de $(x - 1)$. On déduit que :

C_f est au-dessus de T_1 sur $[1; +\infty[$ et en-dessous de T_1 sur $] -\infty; 1]$.

- 4.



Exercice 5

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x)=x^3-5$.

- Calculer $g'(x)$.
- On considère la proposition suivante :
« Si f est une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x^3$ alors pour tout réel x on a $f'(x)=3x^2$ ».
(a) Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.
(b) Sa réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Correction

- g est une fonction polynôme du 2nd degré donc dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x)=3x^2$.
- (a) oui cette proposition est vraie car pour tout réel $h \neq 0$ on a :

$$r(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

d'où $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 3x^2 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2$.

(b) La réciproque est fautive car la fonction g définie sur \mathbb{R} au 1. par $g(x) = x^3 - 5$ admet aussi pour dérivée $g'(x) = 3x^2$.

Exercice 6

Montrer que la courbe d'une fonction affine et sa tangente en un point quelconque sont confondues.

Correction

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $f(a) = ma + p$ et $f'(a) = m$.

L'équation de la tangente T_a à C_f en $x = a$ est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = m(x - a) + ma + p$$

$$y = mx - ma + ma + p$$

$$y = mx + p$$

donc T_a et C_f sont bien confondues.

Exercice 7

1. Montrer que la tangente T au sommet de toute parabole est horizontale
2. Préciser son équation réduite.

Correction

1. Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ une fonction polynôme du 2nd degré avec $a \neq 0$.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 2a(x - \alpha)$ pour tout réel x .
Le sommet S de la parabole a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$.
On a $f'(\alpha) = 0$ donc le coefficient directeur de la tangente T_α à C_f au point S est nul donc T_α est horizontale.
2. Son équation réduite est $y = \beta$