

Exercice 1

Étant donnés a et b deux entiers relatifs, démontrer rigoureusement que $a|(-b) \Rightarrow (-a)|b$.

Exercice 2

1. Démontrer rigoureusement que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
2. Démontrer rigoureusement que la somme de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3.

Exercice 3

Déterminer tous les entiers naturels a et b vérifiant $a^2 - 16b^2 = 36$. Justifier rigoureusement votre réponse.

Exercice 4

Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+6$ divise $3n+11$

Exercice 5

On définit la fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(n) = \frac{2n^2 + 7n + 5}{n+4}$.

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que $f(n) = an + b + \frac{c}{n+4}$.
2. Pour quelles valeurs de n , l'image de n par la fonction f est-elle un entier ?

Exercice 6

Soient $(a; b) \in \mathbb{Z}^2$.

Démontrer que $15|(8a+7b) \Leftrightarrow 15|(7a+8b)$.

Correction

Exercice 1

Supposons que $a \mid (-b)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(-b) = k \times a$.

$$\text{Or, } (-b) = k \times a \Rightarrow b = k \times (-a) \Rightarrow (-a) \mid b$$

Conclusion : si $a \mid (-b)$ alors $(-a) \mid b$.

Exercice 2

1. Soit n et m deux nombres impairs alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 2k + 1$ et $m = 2k' + 1$.

On a :

$$n \times m = (2k + 1) \times (2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1.$$

$$n \times m = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2K + 1 \text{ avec } K = 2(kk' + k + k')$$

Or, $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ donc $K = 2(kk' + k + k') \in \mathbb{Z}$. On déduit que $n \times m = 2K + 1$ est impair.

Conclusion : le produit de deux nombres impairs est toujours impair.

1. Soit $(n-1), n$ et $(n+1)$ trois entiers consécutifs avec $n \in \mathbb{Z}$.

On a $(n-1) + n + (n+1) = 3n$ donc 3 divise $(n-1) + n + (n+1)$.

Conclusion : la somme de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3.

Exercice 3

Soit $(a; b) \in \mathbb{N}^2$.

$$a^2 - 16b^2 = 36 \Leftrightarrow a^2 - (4b)^2 = 36 \Leftrightarrow (a - 4b)(a + 4b) = 36.$$

Or, $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ et $36 > 0$ donc $(a + 4b) \in \mathbb{N}^*$; $(a - 4b) \in \mathbb{N}^*$ et $(a - 4b) \leq (a + 4b)$.

$$(a - 4b)(a + 4b) = 36 \Rightarrow (a - 4b) \mid 36 \text{ et } (a + 4b) \mid 36$$

Or, $36 = 1 \times 28 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$ donc les diviseurs de 36 sont 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 et 36.

On déduit que les couples $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a - 4b)(a + 4b) = 36$ avec $(a - 4b) \leq (a + 4b)$ vérifient donc

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 1 \\ a + 4b = 36 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 2 \\ a + 4b = 18 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 3 \\ a + 4b = 12 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 4 \\ a + 4b = 9 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 6 \\ a + 4b = 6 \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 1 \\ 2a = 37 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 2 \\ 2a = 20 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 3 \\ 2a = 15 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 4 \\ 2a = 13 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a - 4b = 6 \\ 2a = 12 \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} b = 2 \\ a = 10 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ a = 6 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On déduit que si $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ est solution alors $(a; b) = (6; 0)$ ou $(a; b) = (10; 2)$

Réciproquement,

$$6^2 - 16 \times 0^2 = 36 - 0 = 36 \text{ donc le couple } (6; 0) \text{ est solution.}$$

$$10^2 - 16 \times 2^2 = 100 - 16 \times 4 = 100 - 64 = 36 \text{ donc le couple } (10; 2) \text{ est solution.}$$

Conclusion : $S = \{(6; 0); (10; 2)\}$

Exercice 4

$(n+6)|3(n+6)$ et $(n+6)|3n+11 \Rightarrow (n+6)|3(n+6)-3n+11 \Rightarrow (n+6)|3n+18-3n-11 \Rightarrow (n+6)|7$
 Or les diviseurs de 7 sont $\{-7; -1; 1; 7\}$. On déduit que $(n+6) \in \{-7; -1; 1; 7\}$ donc $n \in \{-13; -7; -5; 1\}$.

Réciproquement :

Si $n=-13$ alors $n+6=-7$ et $3n+11=-28$. Or $-7|-28$ donc $n=-13$ convient.

Si $n=-7$ alors $n+6=-1$ et $3n+11=-10$. Or $-1|-10$ donc $n=-7$ convient.

Si $n=-5$ alors $n+6=1$ et $3n+11=-4$. Or $1|-4$ donc $n=-5$ convient.

Si $n=1$ alors $n+6=7$ et $3n+11=14$. Or $7|14$ donc $n=1$ convient.

Conclusion : $S = \{-13; -7; -5; 1\}$

Exercice 5

On définit la fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(n) = \frac{2n^2+7n+5}{n+4}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$f(n) = an + b + \frac{c}{n+4} \Leftrightarrow an(n+4) + b(n+4) + c = 2n^2 + 7n + 5$$

$$f(n) = an + b + \frac{c}{n+4} \Leftrightarrow an^2 + 4an + bn + 4b + c = 2n^2 + 7n + 5$$

$$f(n) = an + b + \frac{c}{n+4} \Leftrightarrow an^2 + (4a+b)n + (4b+c) = 2n^2 + 7n + 5$$

$$f(n) = an + b + \frac{c}{n+4} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ 4a+b=7 \\ 4b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=7-4a \\ c=5-4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=9 \end{cases}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n - 1 + \frac{9}{n+4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$f(n) \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (n+4)|9 \text{ et } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (n+4) \in \{1; 3; 9\} \text{ et } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n=5$$

Conclusion : $S = \{5\}$.

Exercice 7

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Supposons que $15|(8a+7b)$.

$$\text{On a } 15|(15a+15b) \text{ et } 15|(8a+7b) \Rightarrow 15|(15a+15b) - (8a+7b) \Rightarrow 15|(7a+8b).$$

Supposons que $15|(7a+8b)$.

$$\text{On a } 15|(15a+15b) \text{ et } 15|(7a+8b) \Rightarrow 15|(15a+15b) - (7a+8b) \Rightarrow 15|(8a+7b).$$

Conclusion : on déduit que $15|(8a+7b) \Leftrightarrow 15|(7a+8b)$.