La calculatrice est autorisée

Exercice 1- Trajectoire d'un drone

Un drone est lancé depuis une plateforme située à 3 mètres du sol. Sa hauteur h, exprimée en mètres, en fonction du temps t, exprimé en secondes, est modélisée par la fonction $h(t)=-4t^2+16t+3$.

1. Quelle est la nature de sa courbe représentative de h ? Justifier.
2. Déterminer la forme canonique de h à l'aide des formules.
3. Retrouver la forme canonique de h par la méthode de factorisation.
4. Au bout de quelle durée le drone est-il à sa hauteur maximale et quelle est-elle ? Justifier.
5. Étudier les variations de la fonction h sur $[0;+\infty[$. Justifier.
6. À quel instant le drone revient-il au niveau du sol ? Donner la valeur exacte et l'arrondi à 0,1s.
7. Un oiseau vole à une altitude constante de 13m.
   Calculer la durée pendant laquelle le drone reste strictement au-dessus de l'oiseau. Justifier.
   Donner la valeur exacte de cette durée et l'arrondi à 0,1s.

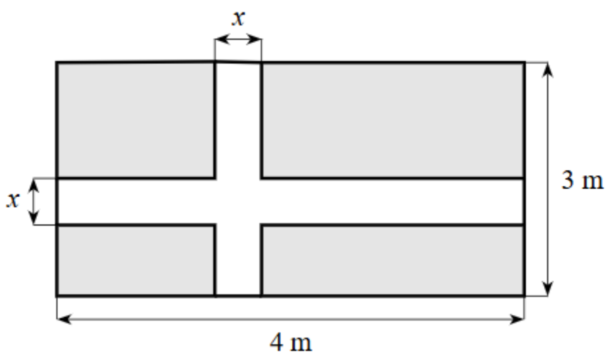
Exercice 2 – Optimisation du bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique et vend des batteries rechargeables. Le coût de production (en euros) pour x batteries est donné par la fonction $C(x)=2x^2-20x-200$ et la recette (en euros) obtenue par la vente de x batteries est modélisée par la fonction $R(x)=-10x^2+460x-3800$. Le bénéfice $B(x)$ réalisé est défini par la différence entre la recette et le coût c'est à dire par la fonction définie par $B(x)=R(x)-C(x)$.

1. Déterminer le nombre de batteries produites pour 1000€.
2. Montrer que $B(x)=-12x^2+480x-3600$.
3. Calculer le nombre de batteries à produire pour que le bénéfice soit maximal.
4. Déterminer ce bénéfice maximal.
5. Résoudre $B(x)>0$ et déduire le nombre de batteries que l'entreprise doit produire et vendre afin d'être bénéficiaire.

Exercice 3

Quelle largeur x doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau.



1. A quel intervalle appartient x dans le contexte de l'exercice ?
2. Montrer que l'aire de la croix peut s'écrire sous la forme $A_{croix}=-x^2+7x$.
3. En déduire que l'aire grise peut s'écrire sous la forme $A_{grise}=x^2-7x+12$.
4. (a) Déterminer une solution évidente de l'équation $x^2-7x+6=0$.
   (b) En déduire l'autre solution.
5. Déduire des questions précédentes, pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de la croix est égale à l'aire grise.

Exercice 4 – Équation avec paramètre

Soit l'équation $(E_m):(m+3)x^2+mx+1=0$ avec $m\in\mathbb{R}$.

1. Si $m=-3$ que peut-on dire de l'équation ? Résoudre alors cette équation (E_{-3}) .
2. Dans cette question, $m\neq-3$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) admet une unique solution.
3. En déduire la résolution des équations (E_{-2}) et (E_6) .

Exercice (Bonus)

Résoudre dans , l'équation $x^4-6x^2+8=0$.

Exercice 1- Trajectoire d'un drone

1. La fonction h est une fonction polynomiale du second degré, sous sa forme développée avec $a=-4<0$ donc sa courbe est une parabole tournée vers le bas.
2. $\alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-16}{2\times(-4)}=\dfrac{-16}{-8}=2$ et $\beta=f(\alpha)=-4\times 2^2+16\times 2+3=-16+32+3=19$ et $a=-4$.
   La forme canonique de h est donc $h(t)=-4(x-2)^2+19$ pour tout réel $t\geqslant 0$.
3. Soit $t\in\mathbb{R}, t\geqslant 0$. On a :
   $h(t)=-4t^2+16t+3=-4(t^2-4t)+3=-4(t^2-2\times t\times 2+2^2-2^2)+3$
   $h(t)=-4[(t-2)^2-4]+3=-4(t-2)^2+16+3=-4(t-2)^2+19$
   On retrouve bien la forme canonique de h obtenue au 2.
4. h est une fonction polynomiale du second degré avec $a=-4<0$ donc h admet un maximum en $x=\alpha=2$ qui vaut $\beta=19$.
   On déduit que le drone atteint sa hauteur maximale au bout de 2s et qu'elle vaut 19m.
5. h est une fonction polynomiale du second degré dont la forme canonique est $h(t)=-4(t-2)^2+19$ pour tout réel $t\geqslant 0$. On déduit que h est croissante sur $[0;2]$ et décroissante sur $[2;+\infty[$.

t	0		2		$+\infty$
h	3	$\nearrow$	19	$\searrow$	

6. Le drone revient au sol lorsque $h(t)=0$ avec $t>0$.
   Résolution de $h(t)=0$ dans $\mathbb{R}$.
   $\Delta=16^2-4\times(-4)\times 3=256+48=304>0$ donc l'équation $h(t)=0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   $t_1=\dfrac{-16-\sqrt{304}}{-8}=\dfrac{16+\sqrt{304}}{8}=2+\dfrac{\sqrt{19}}{2}>$ et $t_2=2-\dfrac{\sqrt{19}}{2}<0$.
   Or, $t_1>0$ et $t_2<0$ donc le drone revient au sol au bout de $t_2=2-\dfrac{\sqrt{19}}{2}\approx 4{,}17\,s$.
7. On cherche à résoudre l'inéquation $h(t)>13\,\text{sur}\,[0;+\infty[$.
   Résolution de $h(t)=13$ dans $\mathbb{R}$.
   $h(t)=13\Leftrightarrow -4t^2+16t+3=13\Leftrightarrow -4t^2+16t-10=0$.
   $\Delta=16^2-4\times(-4)\times(-10)=256-160=96>0$ donc l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   $t_1=\dfrac{-16-\sqrt{96}}{-8}=\dfrac{16+\sqrt{96}}{8}=2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}>0$ et $t_2=2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}>0$
   Comme $a=-4<0$, on déduit le tableau de signes suivant sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$		$2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		$2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$-4t^2+16t-10$		-	0	+	0	-	

   Conclusion : le drone sera au-dessus de 13m pendant $t_1-t_2=\left(2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)-\left(2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=\sqrt{6}\approx 2{,}44\,s$.

Exercice 2 – Optimisation du bénéfice d'une entreprise

1. $C(x)=1000 \Leftrightarrow 2x^2-20x-200=1000 \Leftrightarrow 2x^2-20x-1200=0 \Leftrightarrow x^2-10x-600=0$
   $\Delta=(-10)^2-4\times2\times(-600)=100+2400=2500=50^2>0$ donc l'équation a deux solutions distinctes
   $x_1=\dfrac{10-50}{2}=-20<0$ et $x_2=\dfrac{10+50}{2}=30>0$
   On déduit que le coût de production est égal à 1000€ lorsque l'entreprise produit 30 batteries.
2. $B(x)=R(x)-C(x)$
   $B(x)=(-10x^2+460x-3800)-(2x^2-20x-200)$
   $B(x)=-10x^2+460x-3800-2x^2+20x+200$
   $B(x)=-12x^2+480x-3600$
3. B est une fonction polynôme du second degré, sous sa forme développée avec $a=-12<0$ donc B admet un maximum en $\alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-480}{(-24)}=20$.
   Le bénéfice sera maximal lorsque l'entreprise produira et vendra 20 batteries.
4. Le bénéfice maximal vaudra alors $\beta=f(\alpha)=-12\times20^2+480\times20-3600=1200\,€$.
5. Résolution de $B(x)=0$ dans $\mathbb{R}$.
   $\Delta=480^2-4\times(-12)\times(-3600)=57600=240^2>0$ donc l'équation $B(x)=0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   $x_1=\dfrac{-480-240}{-24}=30$ et $x_2\dfrac{-480+240}{-24}=10$
   Comme $a=-12<0$, on déduit le tableau de signes de $B(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		10		30		$+\infty$
$B(x)$		-	0	+	0	-	

Conclusion : l'entreprise est bénéficiaire lorsqu'elle produit et vend entre 10 et 30 batteries rechargeables

Exercice 3

$A_{croix}=4\times x+3\times x-x^2=7x-x^2$. On déduit $A_{restante}=4\times3-(7x-x^2)=12-7x+x^2=x^2-7x+12$.
On cherche donc $x\in]0;3[$ tel que $7x-x^2=x^2-7x+12$.
Or, $7x-x^2=x^2-7x+12 \Leftrightarrow 2x^2-14x+12=0 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0$.
$x_1=1$ est une solution évidente car $1^2-7\times1+6=1-7+6=-6+6=0$ donc la deuxième solution x_2 vérifie $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ donc $x_2=\dfrac{6}{1}=6$. Or, $x_2=6>3$ donc ne peut pas convenir.

Conclusion : Seule la solution $x_1=1$ peut convenir. La croix aura une aire égale à l'aire restante lorsque $x=1$.

Correction

Exercice 4 – Équation avec paramètre

Soit l'équation $(E_m):(m+3)x^2+mx+1=0$ avec $m\in\mathbb{R}$.

1. $(E_{-3}):(-3+3)x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow (E_{-3}):-3x+1=0$ alors (E_{-3}) est une équation du 1[er] degré admettant pour solution $\dfrac{1}{3}$.
2. Soit $m\in\mathbb{R}, m\neq\dfrac{1}{3}$. (E_m) admet une unique solution lorsque son discriminant est nul c'est à dire lorsque $\Delta=m^2-4\times(m+3)\times1=0 \Leftrightarrow m^2-4m-12=0$.

   Résolution de $m^2-4m-12=0$ dans $\mathbb{R}$.
   $\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-12)=16+48=64>0$ donc l'équation a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:
   $m_1=\dfrac{4-8}{2}=-2$ et $m_2\dfrac{4+8}{2}=6$
3. $(E_{-2}):x^2-2x+1=0$ admet alors une seule solution $x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1$.

   $(E_6):9x^2+6x+1=0$ admet alors une seule solution $x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-6}{18}=\dfrac{-1}{3}$.

Exercice (Bonus)

On pose $X=x^2$. On déduit $x^4-6x^2+8=0 \Leftrightarrow X^2-6X+8=0$.
Or, $X_1=2$ est une racine évidente car $2^2-6\times1+8=4-12+8=0$ donc la deuxième racine X_2 vérifie $X_1X_2=\dfrac{c}{a}$ donc $X_2=\dfrac{8}{2}=4$ donc $X^2-6X+8=0$ a deux racines dans $\mathbb{R}$: 2 et 4
$X=x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$
$X=x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

Conclusion : $x^4-6x^2+8=0$ a quatre solutions : $-2;2;\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.