

Chapitre 1 : Relation de divisibilité dans \mathbb{Z}

I. Diviseurs et multiples

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs.

a **divise** b s'il existe un entier relatif k tel que $b=ka$. On dit également que :

- a est un **diviseur** de b
- b est **divisible** par a
- b est un **multiple** de a .

Exemple : $-124=-31 \times 4$ donc -31 divise -124 et 4 divise -124

Notation : on notera $-31|-124$ et $4|-124$

Remarques :

- Pour tout entier n , on a $n \times 1 = n$ donc 1 divise n et n divise n
- De plus, $0 \times n = 0$ donc tout entier n divise 0 ainsi l'ensemble des diviseurs de 0 est \mathbb{Z} .

Conséquences : Étant donné un entier relatif n non nul :

- Tout diviseur de n est compris entre $-|n|$ et $|n|$
- Tout entier relatif non nul a donc un **nombre fini** de diviseurs.

Propriété : Étant donnés a et b deux entiers relatifs, on a les équivalences suivantes :

$$a|b \Leftrightarrow (-a)|b \Leftrightarrow a|(-b) \Leftrightarrow (-a)|(-b)$$

Preuve en exercice :

1. (a) Démontrer que si $a|b$ alors $(-a)|b$
 (b) Démontrer que si $-a|b$ alors $a|-b$
 (c) Démontrer que si $a|-b$ alors $(-a)|(-b)$
 (d) Démontrer que si $(-a)|(-b)$ alors $a|b$

2. Quel enchaînement d'implications a-t-on montré ?
 Quelles équivalences peut-on en déduire ?

#

Remarque : a et $-a$ ont les mêmes diviseurs

Exercice 1 : Déterminer tous les entiers naturels a et b vérifiant $a^2 - b^2 = 35$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

II. Propriétés de divisibilité

Propriété de transitivité : Soient a, b et c trois entiers relatifs.

$$\text{Si } a|b \text{ et } b|c \text{ alors } a|c$$

Preuve :

$a|b$ signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$

$b|c$ signifie qu'il existe un entier $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k'b$

On a donc $c = k'ka = (kk')a$ avec $(kk') \in \mathbb{Z}$ donc $a|c$

#

Exemple : $19|38$ et $38|134$ alors $19|134$

Propriétés : Soient a, b et c trois entiers relatifs.

- Si $a|b$ et $a|c$ alors quels que soient les entiers m et n on a $a|b$ et $a|(mb+nc)$
- En particulier, si $a|b$ alors $a|(a+b)$ et $a|(a-b)$

Remarque : on dit aussi que si $a|b$ et $a|c$ alors a divise toute combinaison linéaire de b et c

Preuve :

$a|b$ signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$

$a|c$ signifie qu'il existe un entier $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k'a$

On a donc $mb+nc = mk \times a + nk' \times a = (mk+nk')a$ avec $(mk+nk') \in \mathbb{Z}$ donc $a|mb+nc$

On a $a|b$ et $a|a$ donc la propriété précédente donne $a|(a+b)$ et $a|(a-b)$

#

Exercice 2 : Déterminer tous les entiers n tels que $(2n+7)|(n-3)$.