

Exercice 1 : Déterminer tous les entiers naturels  $a$  et  $b$  vérifiant  $a^2 - b^2 = 35$  .  
Justifier rigoureusement votre réponse.

Correction

Soient  $(a; b) \in \mathbb{N}^2$  .

$$a^2 - b^2 = 35 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 35 ; \text{ Or } (a; b) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow (a+b) \geq 0 .$$

$$(a-b)(a+b) = 35 \geq 0 \text{ et } (a+b) \geq 0 \Rightarrow (a-b) \geq 0 .$$

$$(a-b)(a+b) = 35 \Rightarrow (a+b) | 35 \text{ et } (a-b) | 35 \text{ avec } 0 \leq (a-b) \leq (a+b) .$$

Or, les diviseurs positifs de 35 sont 1;5;7 et 35.

$$\text{On déduit } a^2 - b^2 = 35 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=35 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=5 \\ a+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=17 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=6 \\ b=1 \end{cases} .$$

Réciproquement, on vérifie que les couples (18;17) et (6;1) vérifient  $a^2 - b^2 = 35$  .

Conclusion : les couples d'entiers naturels solutions de l'équation  $a^2 - b^2 = 35$  sont exactement les couples (18;17) et (6;1).

Exercice 2 : Déterminer tous les entiers  $n$  tels que  $(2n+7)|(n-3)$  .

Correction

$$(2n+7)|(n-3) \text{ et } (2n+7)|(2n+7) \text{ donc } (2n+7)|(2n+7) - 2(n-3) \text{ donc } (2n+7)|13 .$$

Or les diviseurs de 13 sont -13;-1;1 et 13.

$$2n+7 = -13 \Leftrightarrow 2n = -20 \Leftrightarrow n = -10$$

$$2n+7 = -1 \Leftrightarrow 2n = -8 \Leftrightarrow n = -4$$

$$2n+7 = 1 \Leftrightarrow 2n = -6 \Leftrightarrow n = -3$$

$$2n+7 = 13 \Leftrightarrow 2n = 6 \Leftrightarrow n = 3$$

Les seules solutions possibles sont -10 ; -4 ; -3 ; 3.

Réciproquement :

$$\text{si } n = -10 \text{ alors } 2n+7 = -13 \text{ et } n-3 = -13 . \text{ Or } 13 | -13 .$$

$$\text{si } n = -4 \text{ alors } 2n+7 = -1 \text{ et } n-3 = -5 . \text{ Or } -1 | -5 .$$

$$\text{si } n = -3 \text{ alors } 2n+7 = 1 \text{ et } n-3 = -6 . \text{ Or } 1 | -6 .$$

$$\text{si } n = 3 \text{ alors } 2n+7 = 13 \text{ et } n-3 = 0 . \text{ Or } 13 | 0 .$$

Conclusion : les entiers  $n$  tels que  $(2n+7)|(n-3)$  sont exactement -10 ; -4 ; -3 ; 3.