Exercice 1
Étant donnés a et b deux entiers relatifs, démontrer que $\boldsymbol{a|b \Rightarrow (-a)|b}$.

Exercice 2
Démontrer que le carré de tout nombre impair est un nombre impair.

Exercice 3
Déterminer tous les entiers naturels a et b vérifiant $a^2-9b^2=28$. Justifier rigoureusement votre réponse.

Exercice 4

1. Déterminer tous les diviseurs de 15 dans $\mathbb{N}$.
2. Trouver tous les couples $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tels que $m^2-n^2=15$.

Exercice 5
Déterminer les entiers relatifs n tels que n+4 divise 2n+13

Exercice 6
On définit la fonction $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ par $f(n)=\dfrac{2n^2-5n+1}{n+3}$.

1. Déterminer les nombres a,b et c tels que $f(n)=an+b+\dfrac{c}{n+3}$.
2. Pour quelles valeurs de n , l'image de n par la fonction f est-elle un entier ?

Exercice 7
Soient $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$.
Démontrer que $13|(6a+7b)\Leftrightarrow 13|(7a+6b)$.

Correction

Exercice 1

Supposons que $a|b$ alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $b=k\times a$.
Or, $b=k\times a=(-k)\times(-a)$ avec $(-k)\in\mathbb{Z}$ donc $(-a)|b$

Conclusion : si $a|b$ alors $(-a)|b$.

Exercice 2

Soit n un nombre impair alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n=2k+1$. On a alors :
$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2K+1$. Or, $k\in\mathbb{Z}$ donc $K=2k^2+2k\in\mathbb{Z}$.
On déduit que $n^2=2K+1$ est impair.

Exercice 3

Soit $(a;b)\in\mathbb{N}^2$.
$a^2-9b^2=28 \Leftrightarrow a^2-(3b)^2=28 \Leftrightarrow (a-3b)(a+3b)=28$.
Or, $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ et $28>0$ donc $(a+3b)\in\mathbb{N}^*;(a-3b)\in\mathbb{N}^*$ et $(a-3b)\leqslant(a+3b)$.
$(a-3b)(a+3b)=28 \Rightarrow (a-3b)|28$ et $(a+3b)|28$

Or, $28=1\times28=2\times14=4\times7$ donc les diviseurs de 28 sont 1; 2 ; 4 ; 7 ; 14 et 28.

On déduit que les couples $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $(a-3b)(a+3b)=28$ avec $(a-3b)\leqslant(a+3b)$ vérifient donc

$$\begin{cases} a-3b=1 \\ a+3b=28 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-3b=2 \\ a+3b=14 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-3b=4 \\ a+3b=7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{29}{2}\notin\mathbb{N} \\ b=\dfrac{9}{2}\notin\mathbb{N} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=8 \\ b=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=\dfrac{11}{2}\notin\mathbb{N} \\ b=\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

On déduit que le seul couple $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ solution possible est donc (8;2).

Réciproquement,
$8^2-9\times2^2=64-9\times4=64-36=28$ donc le couple (8;2) est solution.

Conclusion : S={(8;2)}

Exercice 4

1. Les diviseurs de 15 dans $\mathbb{N}$ sont : 1;3;5;15.
2. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.
   $m^2-n^2=15 \Leftrightarrow (m-n)(m+n)=15 \Leftrightarrow (m-n)|15$ et $(m-n)|15$ et $(m-n)(m+n)=15$
   $m^2-n^2=15 \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=15 \\ m-n=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} m+n=5 \\ m-n=3 \end{cases}$

   Conclusion : S={(15;1) ; (5;3)}

Exercice 5

Déterminer les entiers relatifs n tels que n+4 divise 2n+13

$(n+4)|(n+4)$ et $(n+4)|(2n+13) \Rightarrow (n+4)|(2n+13)-2(n+4) \Rightarrow (n+4)|(2n+13-2n-8) \Rightarrow (n+4)|5$

Or les diviseurs de 5 sont : -5 ; -1 ; 1 et 5 donc $(n+4)\in\{-5;-1;1;5\}$ donc $n\in\{-9;-5;-3;1\}$.

Si n=-9 alors n+4=-5 et 2n+13=-5. Or, -5 divise -5 donc n=-9 est solution.
Si n=-5 alors n+4=-1 et 2n+13=3 Or, -1 divise 3 donc n=-5 est solution.
Si n=-3 alors n+4=-1 et 2n+13=7. Or, -1 divise 7 donc n=-3 est solution.
Si n=1 alors n+4=5 et 2n+13=-1. Or, 5 divise 15 donc n=1 est solution.

Conclusion : S={-9;-5;-3;1}

Exercice 6

On définit la fonction $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ par $f(n)=\dfrac{2n^2-5n+1}{n+3}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$f(n)=an+b+\frac{c}{n+3} \Leftrightarrow an(n+3)+b(n+3)+c=2n^2-5n+1$$

$$f(n)=an+b+\frac{c}{n+3} \Leftrightarrow an^2+3an+bn+3b+c=2n^2-5n+1$$

$$f(n)=an+b+\frac{c}{n+3} \Leftrightarrow an^2+(3a+b)n+(3b+c)=2n^2-5n+1$$

$$f(n)=an+b+\frac{c}{n+3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ 3a+b=-5 \\ 3b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5-3a \\ c=1-3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-11 \\ c=34 \end{cases}$$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}, f(n)=2n-11+\dfrac{34}{n+3}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$.

Si $f(n)\in\mathbb{Z}$ alors $2n-11+\dfrac{34}{n+3}\in\mathbb{Z}$ donc $(n+3)|34$

Or les diviseurs de 34 sont : -34 ; -17 : -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 17 ; 34 donc

$n+3=-34$ ou $n+3=-17$ ou $n+3=-2$ ou $n+3=-1$ ou $n+3=1$ ou $n+3=2$ ou $n+3=17$ ou $n+3=34$

$n=-37$ ou $n=-20$ ou $n=-5$ ou $n=-4$ ou $n=-2$ ou $n=-1$ ou $n=14$ ou $n=31$

Or $n\in\mathbb{N}$ donc les seules solutions possibles sont $n=14$ et $n=31$.

Réciproquement,

Si $n=14$ alors $f(14)=2\times14-11+\dfrac{34}{14+3}=28-11+2=19\in\mathbb{Z}$ donc $n=14$ est solution.

Si $n=31$ alors $f(31)=2\times31-11+\dfrac{34}{31+3}=62-11+1=52\in\mathbb{Z}$ donc $n=31$ est solution.

Conclusion : S={14 ; 31}.

Exercice 7

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.

Supposons que $13|(6a+7b)$.

On a $13|(13a+13b)$ et $13|(6a+7b)\Rightarrow 13|(13a+13b)-(6a+7b)\Rightarrow 13|(7a+6b)$.

Supposons que $13|(7a+6b)$.

On a $13|(13a+13b)$ et $13|(7a+6b)\Rightarrow 13|(13a+13b)-(7a+6b)\Rightarrow 13|(6a+7b)$.

Conclusion : on déduit que $13|(6a+7b)\Leftrightarrow 13|(7a+6b)$.