

## Correction

## Exercice 1 - Le nombre d'or

1. Soit  $a$  la largeur du rectangle d'or et  $b$  sa longueur avec  $b > a > 0$ .

$$\text{On a } \frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} \text{ donc } b(b-a) = a^2 \text{ donc } b^2 - ab = a^2.$$

2. Posons  $x = \frac{b}{a}$  avec  $b > a > 0$ . On a :

$$b^2 - ab = a^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} - \frac{ab}{b^2} = \frac{a^2}{a^2} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow (E): x^2 - x - 1 = 0$$

3. Résolution de  $(E): x^2 - x - 1 = 0$  dans  $\mathbb{R}$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0 \text{ donc } (E) \text{ a deux racines réelles distinctes :}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

4. On note  $\phi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ .

$$\phi \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \phi^2 = \phi + 1$$

$$\phi^2 = \phi + 1 \Leftrightarrow \frac{\phi^2}{\phi} = \frac{\phi}{\phi} + \frac{1}{\phi} \Leftrightarrow \phi = 1 + \frac{1}{\phi} \Leftrightarrow \frac{1}{\phi} = \phi - 1$$

5.  $\phi^2 = \phi + 1 \Leftrightarrow \phi^3 = \phi^2 + \phi$ . Or,  $\phi^2 = \phi + 1$  donc  $\phi^3 = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$ .

6.  $\phi^3 = 2\phi + 1$  donc  $\phi^4 = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 2\phi + 2 + \phi = 3\phi + 2$

$$\phi^4 = 3\phi + 2 \text{ donc } \phi^5 = 3\phi^2 + 2\phi = 3(\phi + 1) + 2\phi = 3\phi + 3 + 2\phi = 5\phi + 3$$

## Exercice 2 - Equations bicarrées

1. Résolution de  $(E): 2x^4 + x^2 - 6 = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

(a) On pose  $X = x^2$ .  $(E): 2x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (E'): 2X^2 + X - 6 = 0$ .

- (b) Résolution de  $(E')$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2 > 0 \text{ donc } (E') \text{ a deux racines réelles distinctes :}$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 7}{4} = -2 < 0 \text{ et } X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{3}{2} > 0$$

Conclusion : les solutions de  $(E')$  sont  $-2$  et  $\frac{3}{2}$ .

- (c) Résolution de  $(E)$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$X = x^2 \geq 0 \text{ donc } X_2 = -2 \text{ est impossible.}$$

$$X = x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Conclusion : Les solutions de  $(E)$  sont  $-\sqrt{\frac{3}{2}}$  et  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

2.  $(F): x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ . On pose  $X = x^2$ . On déduit  $(F) \Leftrightarrow (F'): X^2 + 4X - 5 = 0$ .

Or,  $X_1 = 1$  est une racine évidente de  $(F')$  car  $1^2 + 4 \times 1 - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$  donc la deuxième racine

$X_2$  vérifie  $X_1 X_2 = \frac{c}{a}$  donc  $X_2 = \frac{-5}{1} = -5$  donc  $(F')$  a deux racines dans  $\mathbb{R}$  : 1 et -5

$X = x^2 = -5 < 0$  est impossible

$X = x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -1$

Conclusion :  $(F)$  a deux racines : -1 et 1