Chapitre 1 : Second degré

I. Fonction polynôme du second degré

1. Définition

Définition : Une **fonction polynôme du second degré** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $\boldsymbol{f(x)=ax^2+bx+c}$ **avec** $\boldsymbol{a\neq 0}$.

Remarques :
- *Les réels* a, b et c *sont appelés les* ***coefficients*** *de ce polynôme.*
- *L'écriture* $f(x)=ax^2+bx+c$ *avec* $a\neq 0$ *la* ***forme développée*** *de* $f(x)$
- *Par abus de langage, on parle souvent de polynôme du second degré au lieu de fonction polynôme du second degré.*

Exemples :
- f(x) = 2x² – 3x + 1 est une fonction trinôme du second degré avec *a* = 2, *b* = -3 et *c* = 1
  2x² – 3x + 1 est la forme développée de la fonction trinôme f.

- g(x) = -3x² est une fonction trinôme du second degré avec *a* = -3, *b* = 0 et *c* = 0
  -3x² est la forme développée de la fonction trinôme g.

2. Racines d'un polynôme

Définition : Les **racines** d'une fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ sont les solutions de l'équation $\boldsymbol{f(x)=0}$

Remarque : x_0 est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $ax_0{}^2 + b\,x_0 + c = 0$.

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ admettant deux racines x_1 et x_2 alors f peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)}$ appelée **forme factorisée** de $f(x)$.

Remarque : Il existe une infinité de fonctions polynômes admettant deux réels x_1 et x_2 pour racines.

Démonstration :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ admettant deux racines x_1 et x_2 .
Comme x_1 est une racine de f on déduit que $ax_1^2+bx_1+c=0$ et par conséquent $c=-ax_1^2-bx_1$
d'où $f(x)=ax^2+bx-ax_1^2-bx_1=a(x^2-x_1^2)+b(x-x_1)$
d'où $f(x)=a(x-x_1)(x+x_1)+b(x-x_1)$
d'où $f(x)=(x-x_1)[a(x+x_1)+b]$
Comme x_2 est une racine de f on déduit que $(x_2-x_1)[a(x_2+x_1)+b]=0$

Comme $x_2 \neq x_1$ on déduit que $a(x_2+x_1)+b=0$ donc $b=-a(x_2+x_1)$

d'où $f(x)=(x-x_1)[a(x+x_1)-a(x_2+x_1)]=a(x-x_1)[(x+x_1)-(x_2+x_1)]$
d'où $f(x)=a(x-x_1)[(x+x_1)-(x_2+x_1)]=a(x-x_1)(x+x_1-x_2-x_1)=a(x-x_1)(x-x_2)$ #

Exercice 1 :

1. Montrer que 1 et -3 sont deux racines du polynôme $f(x)=x^2+2x-3$
2. En déduire sa forme factorisée.

3. Polynômes égaux

Propriété : Deux fonctions trinômes du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ et $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ avec $a'\neq 0$ sont **égales** si et seulement si $\boldsymbol{a=a' b=b'}$ **et** $\boldsymbol{c=c'}$

Démonstration :

- Si a=a' , b=b' et c=c' alors nécessairement $f(x)=g(x)$ pour tout réel x
- Si $f(x)=g(x)$ pour tout réel x alors en particulier $f(0)=g(0)$ donc $c=c'$
  De même,
  $f(1)=g(1)$ donc $a+b+c=a'+b'+c$ donc $a+b=a'+b'$ donc $(a-a')+(b-b')=0$
  $f(-1)=g(-1)$ donc $a-b+c=a'-b'+c$ donc $a-b=a'-b'$ donc $(a-a')-(b-b')=0$

On obtient donc le système

$$\begin{cases}(a-a')+(b-b')=0\\(a-a')-(b-b')=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-a')+(b-b')=0\\2(a-a')=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-a')+(b-b')=0\\a=a'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=b'\\a=a'\end{cases}$$

Conclusion : Si $f(x)=g(x)$ pour tout réel x alors nécessairement $a=a' b=b'$ et $c=c'$

Conclusion : $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ avec $a\neq 0\, a'\neq 0 \Leftrightarrow a=a' b=b'$ et $c=c'$ #

Exercice 2 :

Montrer que la forme factorisée de $f(x)=3x^2+2x-1$ est $3(x-\frac{1}{3})(x+1)$

4. Somme et produit des racines

Propriété : Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ une fonction polynôme du second admettant deux racines distinctes x_1 et x_2 . La somme $\boldsymbol{S}$ et le produit $\boldsymbol{P}$ des racines vérifient :

$$\boldsymbol{S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{P=x_1x_2=\frac{c}{a}}$$

Démonstration :
D'après la démonstration de la propriété du 2. Racines d'un polynôme, on a démontré que :

$b=-a(x_2+x_1)$ donc $(x_1+x_2)=\frac{-b}{a}$ avec $a\neq 0$

Or, comme f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 on a $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ d'où :

$a(x-x_1)(x-x_2)=a x^2+b x+c \Leftrightarrow a x^2-a x x_2-a x x_1+a x_1 x_2=ax^2-a(x_1+x_2)x+c$

$a x^2-a x x_2-a x x_1+a x_1 x_2=ax^2-a(x_1+x_2)x+c \Leftrightarrow a x^2-a x x_2-a x x_1+a x_1 x_2=ax^2-a x x_1-ax x_2+c$

$a x^2-a x x_2-a x x_1+a x_1 x_2=ax^2-a x x_1-ax x_2+c \Leftrightarrow a x_1 x_2=c \Leftrightarrow x_1 x_2=\frac{c}{a}$ avec $a\neq 0$ #

Exercice 3 :

1. Montrer que -2 est une racine du polynôme du second degré $f(x)=4x^2+7x-2$
2. En déduire la valeur de sa deuxième racine.

5. Signe d'un polynôme du second degré par sa forme factorisée

Propriété : Une fonction polynôme du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ admettant deux racines distinctes $x_1<x_2$ est du signe de a sur $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$ et du signe de $-a$ sur $]x_1;x_2[$

Démonstration :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ de la forme admettant deux racines x_1 et x_2 telles que $x_1<x_2$. On a alors $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

On dresse alors le tableau de signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		-	0	+		+	
$(x-x_2)$		-		-	0	+	
$(x-x_1)(x-x_2)$		+	0	-	0	+	
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$		Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a	

d'où le résultat #

Remarque : on dit aussi qu'une fonction polynôme du second degré admettant deux racines distinctes est du signe de « a » à l'extérieur des racine set du signe de « -a » à l'intérieur des racines.

Exercice 4 :
Sans aucun calcul, résoudre $-5(x-3)(x+2)<0$

II. Équations du second degré

1. Forme canonique

Propriété : Toute fonction trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta} \text{ avec } \textbf{avec } \boldsymbol{\alpha=\frac{-b}{2a}} \text{ et } \boldsymbol{\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}=f(\alpha)}$$

Démonstration :

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}]=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}]$$

$$f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2})]=a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})]=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a(x-\alpha)^2+\beta$$

#

Définition : L'écriture $\boldsymbol{f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta}$ est appelée **forme canonique** de f .

Définition : Le réel $\boldsymbol{\Delta=b^2-4ac}$, est appelé le **discriminant** du trinôme.

Exercice 5 :
Déterminer la forme canonique de $f(x)=-x^2+4x-7$.

Exercice 6 :
A l'aide des identités remarquables et sans utiliser les formules de calculs de α et de β ,
déterminer la forme canonique de $f(x)=2x^2-20x+10$.

Exercice 7 :
Pour chacune des fonctions polynômes du second degré suivantes, précisez, si possible, la nature de sa forme (développée, factorisée, canonique, autre…)

- $f(x) = 4x^2 - x + 7$ forme :
- $g(x) = (x-1)(x-7)$ forme :
- $h(x) = -4(2-x)(x-5)$ forme :
- $i(x) = 5x - x^2 + 10$ forme :
- $j(x) = 4(x-7)^2 + 13$ forme :
- $k(x) = 5[(x-1)^2 - 3]$ forme :
- $l(x) = (2x-1)(x+4)$ forme :

Remarque : le verbe « discriminer » signifie « distinguer avec précision ».

2. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Propriété : On considère l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ dont le discriminant est le réel $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$ alors l'équation a 2 solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta=0$ alors l'équation a une seule solution $x_0=\dfrac{-b}{2a}$ appelée racine double
- Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a aucune solution.

Démonstration à connaître :

$$ax^2+bx+c=0 \text{ avec } a\neq 0 \Leftrightarrow a[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}]=0 \Leftrightarrow [\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}]$$

- Si $\Delta>0$ alors $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$

  donc l'équation a bien deux solutions distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta=0$ alors $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\dfrac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-b}{2a}$

  donc l'équation a bien une seule solution $x_0=\dfrac{-b}{2a}$

- Si $\Delta<0$ alors $[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}]<0$

  donc l'équation n'a aucune solution réelle car $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$ et un carré est toujours positif ou nul

#

Remarques :

- *Si l'équation se factorise facilement (identité remarquable par exemple), il devient alors inutile d'appliquer ces formules pour résoudre l'équation*
- *De même, si on détermine une racine évidente {-2 ;-1;1;2 } par calcul mental , il suffit alors d'utiliser les formules de la somme ou du produit pour déterminer la seconde solution de l'équation.*

Exercice 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$6x^2-x-1=0$	$x^2-5x+7=0$	$4x^2-4x+1=0$

III. Variations et représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

1. Variations d'une fonction polynôme du second degré

Propriété : La fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ admet pour tableau de variations :

Cas où a < 0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Cas où a > 0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration dans le cas où a > 0 et x > α

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec a > 0.

Soit $\alpha \leqslant u < v$ avec u et v deux réels. On a successivement :

$0 \leqslant u-\alpha < v-\alpha$

$0^2 \leqslant (u-\alpha)^2 < (v-\alpha)^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$0 \leqslant a(u-\alpha)^2 < a(v-\alpha)^2$ car a > 0

$\beta \leqslant a(u-\alpha)^2+\beta < a(v-\alpha)^2+\beta$

donc $\beta \leqslant f(u) < f(v)$ donc f est croissante sur $[\,\alpha ;+\infty[$ #

Remarques:

- *Les autres cas s'obtiennent de manière analogue*
- *Si* $f(x)=ax^2+bx+c$ *alors* $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ *avec* $\Delta=b^2-4ac$

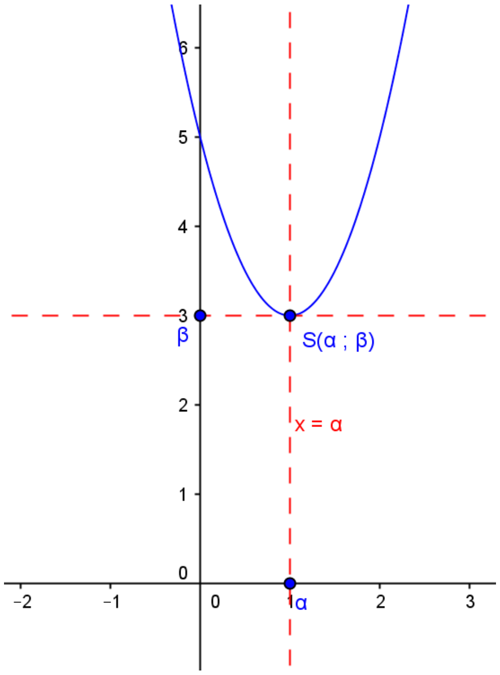
Exercice 9 :

Dresser le tableau de variations de la fonction f définie par f(x) = 2x² – 3x + 1

2. Représentation graphique, Sommet et axe de symétrie

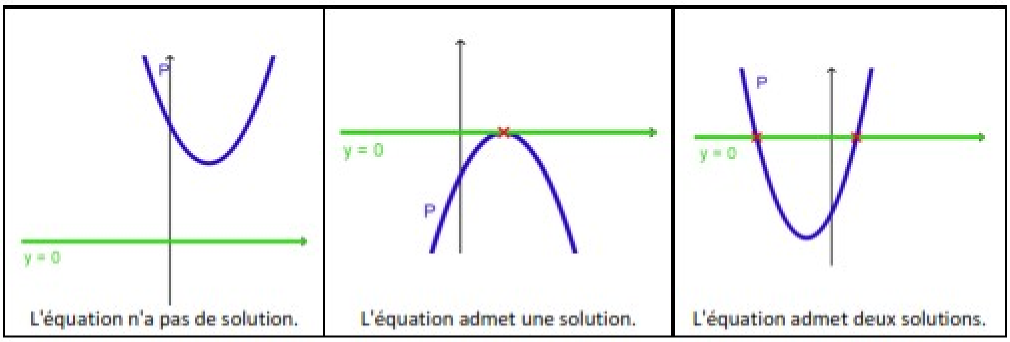
Propriété : La fonction polynôme du second degré f telle que $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ admet pour courbe représentative une **parabole** (P) de **sommet** $S(\alpha\,;\beta)$ et **d'axe de symétrie**, la droite d'équation $x=\alpha$ avec $avec\ \alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et

$\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}=f(\alpha)$



Démonstration :
Soit $M(x;f(x))$ un point de la parabole (P) d'équation $y=a(x-\alpha)^2+\beta$.
Soit $M'(x';y')$ le symétrique de M par rapport à l'axe (d) d'équation $y=\alpha$.
On a donc $\dfrac{x+x'}{2}=\alpha$ et $y=y'$ car $K(\dfrac{x+x'}{2};y)$ est le milieu du segment $[MM']$.
On déduit que $x'=2\alpha-x$ et $y=y'$ d'où
$f(x')=a(x'-\alpha)^2+\beta=a(2\alpha-x-\alpha)^2+\beta=a(\alpha-x)^2+\beta=a(x-\alpha)^2+\beta=y=y'$
donc $M'(x';y')$ symétrique de M par rapport à l'axe (d) d'équation $y=\alpha$ appartient bien à la parabole (P) donc l'axe (d) 'équation $x=\alpha$ est bien axe de symétrie de la parabole (P). #

Remarque : Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ correspondent aux <u>abscisses</u> des points d'intersections entre la parabole (P) d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et l'axe des abscisses .



Δ < 0 **Δ = 0** **Δ > 0**

Remarque : selon la valeur de a , la courbure peut être tournée dans l'autre sens sur les schémas ci-dessus !

IV. Signe d'un polynôme du second degré

1. Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété : Soit ax^2+bx+c un un polynôme du second degré et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

- Si $\boldsymbol{\Delta>0}$ alors $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$ avec $\boldsymbol{x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boldsymbol{x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$
- Si $\boldsymbol{\Delta=0}$ alors $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2}$ avec $\boldsymbol{x_0=\frac{-b}{2a}}$
- Si $\boldsymbol{\Delta<0}$ alors $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ **n'est pas factorisable**

Démonstration :

Comme $a\neq 0$ *, on a* $f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$

- *Si* $\Delta>0$ *alors* $f(x)=a(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\times(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})=a(x-x_1)(x-x_2)$
  avec $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- *Si* $\Delta=0$ *alors* $f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2=0=a(x-\frac{-b}{2a})^2=a(x-x_0)^2$ *avec* $x_0=\frac{-b}{2a}$
- *Si* $\Delta<0$ *alors* $f(x)$ *ne se factorise pas en produit de deux facteurs du 1er degré car s'il se factorisait ainsi, il aurait deux racines ; ce n'est pas le cas car son discriminant est négatif.*

  Remarque : ce type de raisonnement s'appelle un raisonnement par l'absurde. #

Exercice 10 :
Factoriser, si possible $f(x)=4x^2+19x-5$

2. Signe d'un polynôme du second degré

Propriété : Soit $a x^2+b x+c$ un polynôme du second degré et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

- Si $\mathbf{\Delta>0}$ alors le trinôme ax^2+bx+c est **du signe de « a » à l'extérieur des racines et du signe de « -a » à l'intérieur des racines**
- Si $\mathbf{\Delta=0}$ alors le trinôme ax^2+bx+c est **du signe de « a » pour tout réel** $\boldsymbol{x\neq\frac{-b}{2a}}$
- Si $\mathbf{\Delta<0}$ alors le trinôme ax^2+bx+c est **du signe de « a » pour tout réel** $\boldsymbol{x}$.

Démonstration :
Comme $a\neq0$, on a

- Si $\Delta>0$ alors $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  On dresse le tableau de signes du produit $(x-x_1)(x-x_2)$. On suppose $x_1<x_2$.

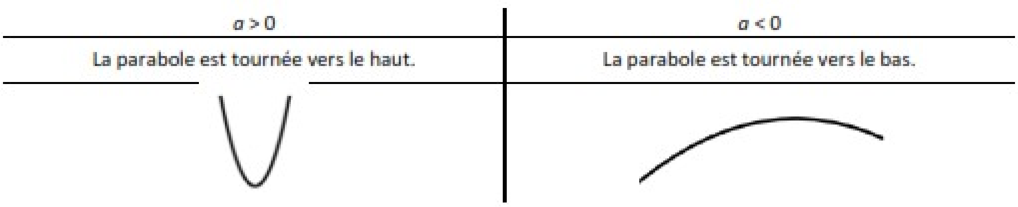
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  $f(x)$ est du signe de a pour $x<x_1 \text{ ou } x>x_2$ et du signe contraire de celui de a pour $x_1<x<x_2$
- Si $\Delta=0$ alors $f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2$ avec $x_0=\frac{-b}{2a}$.
  Un carré étant toujours positif ou nul, on déduit que $f(x)$ est du signe de a pour $x\neq x_0$.
- Si $\Delta<0$ alors $f(x)=a[(x+\frac{b}{2\mathrm{a}})^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$ est le produit de a par un réel strictement positif donc du signe de a pour tout réel x #

Exercice 11 :

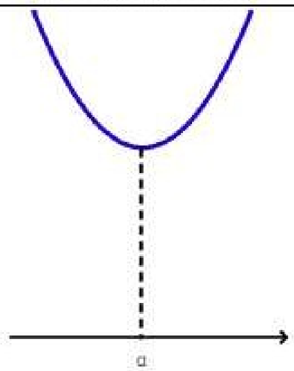
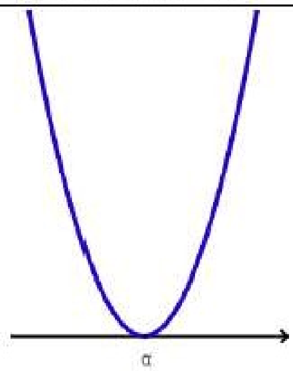
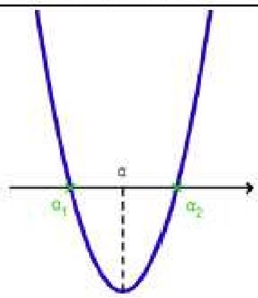
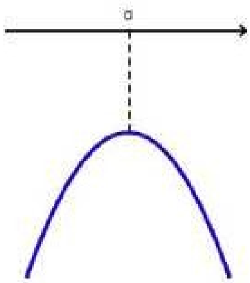
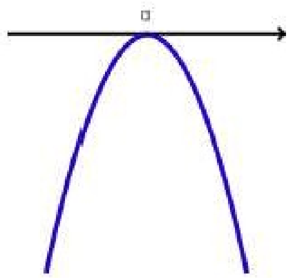
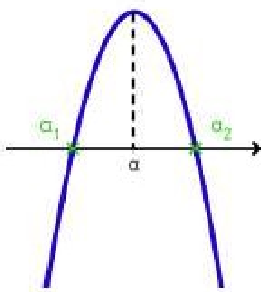
1. Déterminer le signe du polynôme $4x^2+19x-5$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2+x+6>0$

Remarque : Le signe de a permet de connaître l'allure de la parabole



V. Tableau récapitulatif

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq0$

<table>
<tr><th>$\Delta=b^2-4ac$</th><th>$\Delta<0$</th><th>$\Delta=0$</th><th>$\Delta>0$</th></tr>
<tr><td>Solutions de l'équation $P(x)=0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une seule solution :
$\alpha=-\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :
$\alpha_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\alpha_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation de $P(x)$</td><td>Pas de factorisation</td><td>$P(x)=a(x-\alpha)^2$</td><td>$P(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$</td></tr>
<tr><td>$a>0$
Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de $P(x)$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$+$ 0 $+$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α_1 α_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$+$ 0 $-$ 0 $+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a<0$
Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de $P(x)$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$-$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$-$ 0 $-$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α_1 α_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$-$ 0 $+$ 0 $-$</td></tr></table></td></tr>
</table>