

Exercice 1

On considère la fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x)=(x-3)(2x-1)$

1. $(x-3)(2x-1)$ est-elle la forme développée ? canonique ? factorisée ? autre ? de $f(x)$
2. Étudier le signe de $f(x)$ puis résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$

Correction

1. $(x-3)(2x-1)$ n'est clairement pas une forme développée ni une forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Elle ressemble à une forme factorisée mais n'en n'est pas une car ne s'écrit pas précisément sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$
2. On dresse le tableau de signe du produit $(x-3)(2x-1)$

$$\begin{array}{l}
 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \\
 x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \\
 x-3>0 \Leftrightarrow x>3 \\
 x-3<0 \Leftrightarrow x<3 \\
 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \\
 x+2<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}
 \end{array}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$x-3$	-	-	0	+	
$2x-1$	-	0	+	+	
$(x-3)(2x-1)$	+	0	-	0	+

Conclusion : $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in S = [\frac{1}{2}; 3]$

Exercice 2

On considère la fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -(x+5)(x-1)$

1. $-(x+5)(x-1)$ est-elle la forme développée ? canonique ? factorisée ? autre ? de $f(x)$
2. Étudier le signe de $f(x)$ puis résoudre l'inéquation $f(x) > 0$

Correction

1. $-(x+5)(x-1)$ est la forme factorisée de $f(x)$ car du type $a(x-x_1)(x-x_2)$
2. On dresse le tableau de signe du produit $-(x+5)(x-1)$

$$\begin{aligned} x+5=0 &\Leftrightarrow x=-5 & x-1=0 &\Leftrightarrow x=1 \\ x+5>0 &\Leftrightarrow x>-5 & x-1>0 &\Leftrightarrow x>1 \\ x+5<0 &\Leftrightarrow x<-5 & x-1<0 &\Leftrightarrow x<1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
-1	-	-	-	-
$x+5$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$(x-3)(2x-1)$	-	0	+	0

Conclusion : $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in S =]-5; 1[$

Exercice 3

- Déterminer la fonction polynôme du second degré f s'annulant en 3 et en -5 et telle que $f(1) = -2$
- Déterminer la fonction polynôme du second degré f s'annulant en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ telle que $f(-1) = 1$

Correction

- f est une fonction polynôme du second degré s'annulant en 3 et en -5 donc 3 et -5 sont ses deux racines donc f est factorisable sous la forme $f(x) = a(x-3)(x+5)$.
Or $f(1) = -2$ donc $a \times (1-3)(1+5) = -2$ donc $-12a = -2$ donc $a = \frac{1}{6}$
Conclusion : $f(x) = \frac{1}{6}(x-3)(x+5) = \frac{1}{6}(x^2 + 5x - 3x - 15) = \frac{1}{6}(x^2 + 2x - 15) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{2}$
- f est une fonction polynôme du second degré s'annulant en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{5}$ donc $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ sont ses deux racines donc f est factorisable sous la forme $f(x) = a(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{5})$.
Or $f(-1) = 1$ donc $a \times (-1 + \frac{1}{2})(-1 - \frac{1}{5}) = 1$ donc $a \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{6}{5}) = 1$ donc $a \times \frac{3}{5} = 1$ donc $a = \frac{5}{3}$.
Conclusion : $f(x) = \frac{5}{3}(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{5})$.

Exercice 4

A l'aide des formules, déterminer la forme canonique des polynômes du second degré suivantes :

$$f(x)=2x^2-3x+1 \quad g(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}x-3 \quad h(x)=-x^2-7x+9 \quad i(x)=3x^2-4$$

Correction

Recherche de la forme canonique de $f(x)=2x^2-3x+1$ à l'aide des formules

$$a=2 \quad ; \quad \alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{4}$$

$$\beta=f(\alpha)=f\left(\frac{3}{4}\right)=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\times\left(\frac{3}{4}\right)+1=2\times\frac{9}{16}-\frac{9}{4}+1=\frac{9}{8}-\frac{18}{8}+\frac{8}{8}=\frac{-1}{8}$$

Conclusion : La forme canonique de $f(x)$ est $f(x)=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$.

Recherche de la forme canonique de $g(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}x-3$ à l'aide des formules

$$a=\frac{1}{4} \quad \alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$$

$$\beta=g(\alpha)=g\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2-\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}-3=\frac{1}{4}\times\frac{4}{25}-\frac{2}{25}-3=\frac{1}{25}-\frac{2}{25}-3=\frac{-1}{25}-\frac{75}{25}=\frac{-76}{25}$$

Conclusion : La forme canonique de $g(x)$ est $g(x)=\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{76}{25}$.

Recherche de la forme canonique de $h(x)=-x^2-7x+9$ à l'aide des formules

$$a=-1 \quad \alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{7}{(-2)}=\frac{-7}{2}$$

$$\beta=h(\alpha)=h\left(\frac{-7}{2}\right)=-\left(\frac{-7}{2}\right)^2-7\times\left(\frac{-7}{2}\right)+9=-\frac{49}{4}+\frac{49}{2}+9=-\frac{49}{4}+\frac{98}{4}+\frac{36}{4}=\frac{85}{4}$$

Conclusion : La forme canonique de $h(x)$ est $h(x)=-\left(x-\left(\frac{-7}{2}\right)\right)^2+\frac{85}{4}=-\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{85}{4}$.

Recherche de la forme canonique de $i(x)=3x^2-4$ à l'aide des formules

Conclusion : $i(x)=3x^2-4$ est déjà écrite sous sa forme canonique d

Exercice 5

Par factorisation et à l'aide des identités remarquables, retrouver vos résultats de l'exercice 4

Correction

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] + 1$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + \frac{8}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}x - 3 = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{4}{5}x\right) - 3 = \frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right] - 3 = \frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right] - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} - \frac{75}{25} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{76}{25}$$

$$h(x) = -x^2 - 7x + 9 = -(x^2 + 7x) + 9 = -\left[\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right] + 9$$

$$h(x) = -\left[\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right] + \frac{36}{4} = -\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} + \frac{36}{4} = -\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4}$$

Exercice 6

Résoudre, si possible, les équations suivantes dans \mathbb{R} :

$$5x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$-x^2 + x - 1 = 0$$

$$16x^2 - 25 = 0$$

Correction

Résolution de l'équation $5x^2 - 6x + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 5 \times 2 = 36 - 40 = -4 < 0 \quad \text{donc l'équation n'admet aucune solution réelle.}$$

Résolution de l'équation du second degré $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16} > 0 \quad \text{donc l'équation admet deux solutions}$$

réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}}{2 \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{(1 - \sqrt{17})}{4} \times 3 = \frac{3 - 3\sqrt{17}}{4}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}}}{2 \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{(1 + \sqrt{17})}{4} \times 3 = \frac{3 + 3\sqrt{17}}{4}$$

Résolution de l'équation du second degré $-x^2 + x - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 1 - 4 = -3 < 0 \quad \text{donc l'équation n'admet aucune solution réelle.}$$

Résolution de l'équation du second degré $16x^2 - 25 = 0$

$$16x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (4x)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (4x - 5)(4x + 5) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \text{ ou } 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ ou } x = -\frac{5}{4}$$

donc l'équation admet deux solutions : $\frac{5}{4}$ et $-\frac{5}{4}$

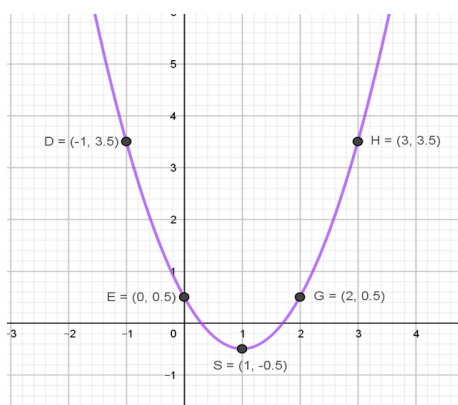
Exercice 7

On considère la fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

1. Quelle est la nature de sa courbe représentative ? Justifier.
2. Déterminer les coordonnées du sommet S de sa courbe.
3. Sa courbe admet-elle un axe de symétrie ? Si oui, donner son équation.
4. Construire sa courbe sur $[-3;3]$ dans un repère à l'aide d'un tableau de valeurs

Correction

1. $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ est une fonction polynôme du second degré donc sa courbe représentative est une parabole (P).
2. Le sommet de la parabole est le point S d'abscisse $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ et d'ordonnée $\beta = f(\alpha) = f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + \frac{1}{2} = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $S(1; -\frac{1}{2})$.
3. La parabole (P) admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha = 1$



Tableur		
	A	B
1	-4	24.5
2	-3	15.5
3	-2	8.5
4	-1	3.5
5	0	0.5
6	1	-0.5
7	2	0.5
8	3	3.5
9	4	8.5

Exercice 8

Déterminer la forme canonique puis développée de la fonction polynôme du second degré f dont la parabole a pour sommet $S(1;3)$ et passant par le point $A(-1;-5)$.

Correction

f est une fonction polynôme du second degré de sommet $S(1;3)$ donc sa forme canonique est du type $f(x)=a(x-1)^2+3$ et sa représentation graphique est une parabole (P).

$A(-1;-5)$ appartient à la parabole (P) donc $f(-1)=-5$.

$$f(-1)=-5 \Leftrightarrow a(-1-1)^2+3=-5 \Leftrightarrow a \times (-2)^2=-2 \Leftrightarrow 4a+3=-5 \Leftrightarrow a=\frac{-8}{4}=-2$$

Conclusion :

- $f(x)=-2(x-1)^2+3$ est la forme canonique de f .
- $f(x)=-2(x-1)^2+3=-2(x^2-2x+1)+3=-2x^2+4x-2+3=-2x^2+4x+1$ est la forme développée f .