

Exercice 1

En justifiant rigoureusement votre réponse, déterminer les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{-18\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(\frac{-35\pi}{4}\right)$$

Correction

$$\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{6\pi+2\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-18\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-16\pi-2\pi}{4}\right) = \cos\left(-4\pi - \frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-35\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-32\pi-3\pi}{4}\right) = \cos\left(-8\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{-35\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \quad A = \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi)$$

$$2. \quad B = \sin(\pi) + \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$3. \quad C = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Correction

$$1. \quad A = \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$2. \quad B = \sin(\pi) + \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$3. \quad C = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 3

On considère le réel x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\cos(x) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

1. Montrer que $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$
2. Calculer la valeur exacte de $\sin(x)$ et en déduire que $\sin(x) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
3. Sachant que $x \in \left\{ \frac{-5\pi}{12}; \frac{-\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right\}$, déterminer la valeur de x

Correction

$$1. (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 = 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{6} + 6 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3}$$

2.

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ donc } \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 + \sin^2(x) = 1 \text{ donc } \frac{1}{16}(6 + 2\sqrt{12} + 2) + \sin^2(x) = 1 \text{ donc}$$

$$\frac{1}{16}(8 + 4\sqrt{3}) + \sin^2(x) = 1 \text{ donc } \sin^2(x) = 1 - \frac{1}{16}(8 + 4\sqrt{3}) = \frac{16}{16} - \frac{8}{16} - \frac{4\sqrt{3}}{16} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16}$$

Or $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\sin(x) \geq 0$ et $8 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ d'après le 1. donc $\sin(x) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

3. Sachant que $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$ et $x \in \left\{ \frac{-5\pi}{12}; \frac{-\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right\}$, on déduit que la seule valeur possible pour x est $\frac{\pi}{12}$

Exercice 4

Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$ puis la valeur exacte de $\tan(x)$ sachant que :

1. $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ et $\sin(x) = \frac{-3}{5}$
2. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ et $\sin(x) = \frac{-1}{3}$
3. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ et $\sin(x) = \frac{3}{4}$

Correction

$$1. \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2(x) + \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2(x) + \frac{9}{25} = 1 \quad \text{donc}$$

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \text{donc} \quad \cos(x) = \frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Or} \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{donc} \quad \cos(x) > 0 \quad \text{donc} \quad \cos(x) = \frac{4}{5}$$

$$\text{On déduit que} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{-3}{5} \times \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$2. \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2(x) + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2(x) + \frac{1}{9} = 1 \quad \text{donc}$$

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \text{donc} \quad \cos(x) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Or} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \quad \text{donc} \quad \cos(x) \geq 0 \quad \text{donc} \quad \cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{On déduit que} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{-1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{-1}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$3. \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2(x) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2(x) + \frac{9}{16} = 1 \quad \text{donc}$$

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \quad \text{donc} \quad \cos(x) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Or} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \quad \text{donc} \quad \cos(x) \leq 0 \quad \text{donc} \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{On déduit que} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{-\sqrt{7}} = \frac{3}{-\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0; 2\pi[$ l'équation $2\cos^2(x) + 9\cos(x) = -4$

Correction

$$2\cos^2(x) + 9\cos(x) = -4 \Leftrightarrow 2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 + 9X + 4 = 0 \text{ en posant } X = \cos(x)$$

Résolution de l'équation $2X^2 + 9X + 4 = 0$ dans \mathbb{R}

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times 2 \times 4 = 81 - 32 = 49 = 7^2 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - 7}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \text{ et } X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + 7}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Or $X = \cos(x)$ donc $-1 \leq X \leq 1$ donc $X = \frac{-1}{2}$

donc $\cos(x) = \frac{-1}{2}$ donc $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k'\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$

Conclusion 1 : l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} est

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k'\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

Conclusion 2 : l'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi[$ est $S = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0; 2\pi[$ l'équation $4 \sin^2(x) - 2(1 + \sqrt{3}) \sin(x) = -\sqrt{3}$

indication : on montrera que $\Delta = (2\sqrt{3} - 2)^2$

Correction

$$\begin{aligned} 4 \sin^2(x) - 2(1 + \sqrt{3}) \sin(x) &= -\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 4 \sin^2(x) - 2(1 + \sqrt{3}) \sin(x) + \sqrt{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4X^2 - 2(1 + \sqrt{3})X + \sqrt{3} &= 0 \text{ en posant } X = \sin(x) \end{aligned}$$

Résolution de l'équation $4X^2 - 2(1 + \sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$ dans \mathbb{R}

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2 - 2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times \sqrt{3} = (2 + 2\sqrt{3})^2 - 16\sqrt{3} = 4 + 8\sqrt{3} + 12 - 16\sqrt{3} = 16 - 8\sqrt{3}$$

Or $(2\sqrt{3} - 2)^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 2 + 4 = 12 - 8\sqrt{3} + 4 = 16 - 8\sqrt{3}$ donc $\Delta = (2\sqrt{3} - 2)^2$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(2 + 2\sqrt{3}) - (2\sqrt{3} - 2)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ et} \\ X_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(2 + 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 2)}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Or $X = \sin(x)$ donc $-1 \leq X \leq 1$ donc $X = \frac{1}{2}$ ou $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1^{er} cas : $X = \frac{1}{2}$ donc $\sin(x) = \frac{1}{2}$ donc $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$

2^{ème} cas : $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k''\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k'''\pi$
avec $k'' \in \mathbb{Z}$ et $k''' \in \mathbb{Z}$

Conclusion 1 : l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} est

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi; \frac{\pi}{3} + 2k''\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k'''\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}; k' \in \mathbb{Z}; k'' \in \mathbb{Z}; k''' \in \mathbb{Z} \right\}$$

Conclusion 2 : l'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi[$ est $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\}$