

Exercice 1

1. Que peut-on dire du carré d'un nombre impair ? Démontrer votre conjecture.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $12n+7$ divise $3n+1$.

Exercice 2

On considère les nombres complexes $z_1=2-3i$ et $z_2=-2+i$. Calculer

z_1+z_2

z_1-z_2

$z_1^2-z_2^2$

$z_1 \times z_2$

z_2^5

Exercice 3

On considère le système (S) :
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=2 \\ x-y-3z=3 \end{cases}$$

1. Déterminer les matrices A, B et X telles que le système s'écrive sous la forme $AX=B$.

2. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

3. En déduire rigoureusement la résolution du système.

Exercice 4

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2+A-6I=0$ puis en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. Montrer que $B^2-B-2I=0$ puis en déduire que B est inversible et calculer B^{-1} .

Exercice 3

$$1. (S): \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=2 \\ x-y-3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow AX=B \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ On observe que } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = A. \text{ Notons } C = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \text{ On a :}$$

$$AC = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 8 & -2 & -4 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

donc les matrices A et C sont inverses l'une de l'autre et $A^{-1}=C$. On déduit que :

$$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B \Leftrightarrow X=CB$$

$$AX=B \Leftrightarrow X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 8 & -2 & -4 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{Conclusion : } S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 4

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + A - 6I = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4-6 & -7+0 \\ 2-2+0 & 11-5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

donc $A^2 + A = 6I$ donc $A(A+I_2) = 6I$ donc $A\left(\frac{1}{6}(A+I_2)\right) = I$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(A+I_2) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$2. \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 32 & 32 & 64 \\ 8 & 32 & 32 \\ 4 & 8 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 - B - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1/4 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0-2 & 2-2-0 & 4-4-0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}-0 & 2-0-2 & 2-2-0 \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}-0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}-0 & 2-0-2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 - B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$3. \quad B^2 - B - 2I = 0 \text{ donc } B^2 - B = 2I \text{ donc } B(B-I) = 2I \text{ donc } \frac{1}{2}B(B-I) = I \text{ donc } B\left(\frac{1}{2}(B-I)\right) = I$$

$$\text{donc } B \text{ est inversible et } B^{-1} = \frac{1}{2}(B-I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$