

Chapitre 8 : Expressions algébriques et équations

Dans tout ce chapitre, les lettres a, b, c, d, k désignent des nombres réels.

François Viète (1540-1603), mathématicien français né à Fontenay-le-Comte en Vendée, a été l'un des premiers à utiliser les lettres en mathématiques.

I. Définition d'une expression algébrique

Définition : Une **expression algébrique** est une formule mathématique contenant des **nombres**, des **lettres** représentant des nombres ainsi que des **parenthèses**, des **opérations** (+, -, ·, ÷) et des **fonctions**.

Exercice 1 :

La formule de Lorentz $P = T - 100 - \frac{T - 150}{a}$ donne « le poids idéal P », en kg, d'un adulte en fonction de sa taille T , exprimée en cm. a est un coefficient égal à 2 pour une femme et 4 pour un homme. Calculer le poids idéal pour un homme de 1,80 m puis pour une femme de 1,70 m.

II. Transformation d'une expression algébrique

Deux expressions peuvent coïncider pour toute valeur, et dans ce cas, on dit qu'elles sont égales.

Exemple : Pour tout réel x , on a $x^2 - 7x = x(x - 7)$

Face à un problème donné, une expression peut s'avérer inadaptée; il faut donc être capable de la transformer dans la mesure du possible.

1. Développer et réduire

Définition : **Réduire** une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

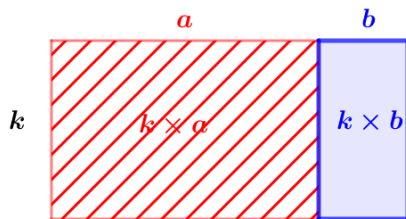
Exercice 2 : Réduire l'expression $A = 2 + 3x - 4 - 5x$

Définition : **Développer** un produit, c'est le transformer en une somme ou une différence.

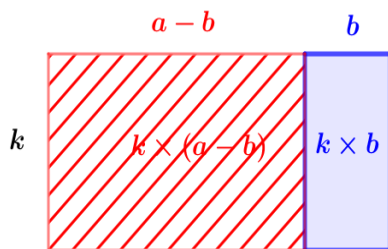
Propriétés :

1. $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$ (distributivité simple)
2. $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$ (double distributivité)

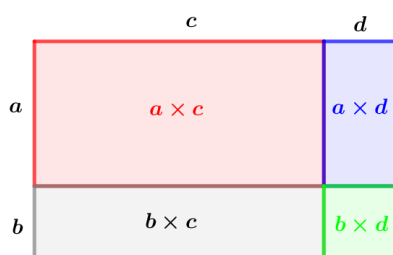
Démonstration géométrique :



L'aire du grand rectangle $k \times (a+b)$ est égale à la somme des aires des rectangles rouge et bleu $k \times a + k \times b$ d'où le résultat.



L'aire du grand rectangle $k \times a$ est égale à la somme des aires des rectangles rouge et bleu $k \times (a-b) + k \times b$ d'où le résultat par soustraction.



L'aire du grand rectangle $(a+b) \times (c+d)$ est égale à la somme des aires des quatre rectangles qu'il contient d'où le résultat.

#

Exercice 3 : Développer et réduire $A=3x(x-2)$ et $B=(2x+5)(x-3)$

Très Important : cas du signe « - » devant une parenthèse

Un signe « - » placé devant une parenthèse change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse.

$$-(a+b) = -a - b \text{ et } -(a-b) = -a + b$$

Très Important !

Pour développer une expression dans laquelle figure un produit précédé du signe « moins », on développe d'abord ce produit à l'intérieur des parenthèses, puis on supprime ces parenthèses en changeant tous les signes.

$$(x+1) - 2(3x-2) = (x+1) - (6x-4) = x+1 - 6x + 4$$

2. Factoriser

Définition : Factoriser une somme ou une différence, c'est la transformer en un produit.

Propriété : $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$ et $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$

Très Important !

Pour factoriser, on doit d'abord repérer un facteur commun. Voici plusieurs cas :

- $(x+1)(3x+2)+5(x+1)=(x+1)[(3x+2)+5]=(x+1)(3x+7)$
- $5x^2+6x=5x \times x+6 \times x=x \times (5x+6)=x(5x+6)$
- $5x+10=5 \times x+5 \times 2=5 \times (x+2)$
- $7x^2-7x=7x \times x-7x \times 1=7x(x-1)$
- $(3x-5)(2x+3)+3(4x+6)=(3x-5) \times (2x+3)+3 \times 2 \times (2x+3)=(2x+3)[(3x-5)+6]$
 $(3x-5)(2x+3)+3(4x+6)=(2x+3)[(3x-5)+6]$

Exercice 4 : Factoriser $C=2x^2+3x$ et $D=(2x-3)(x+1)-(2x-3)(x+7)$

3. Identités remarquables

Les identités remarquables sont des cas particuliers de double distributivité. Il y en a trois :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Démonstration :

- $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

#

Exercice 5 : A l'aide des identités remarquables

Développer	Factoriser
$(x+3)^2$	$a^2+6ab+9b^2$
$(x-3)^2$	$x^2-8x+16$
$(6-2x) \times (6+2x)$	$(x+5)^2-36$

4. Expressions fractionnaires

Propriété : Un quotient n'est calculable que lorsque son **dénominateur est non nul** (c'est à dire différent de zéro) car on n'a pas le droit de diviser par zéro.

Définition : Les valeurs pour lesquelles le dénominateur d'un quotient s'annule s'appellent les **valeurs interdites**.

Propriété : Un quotient est nul si et seulement si son **numérateur est nul et son dénominateur est non nul**.

Règles : Les règles de calcul numérique sur les quotients, notamment la mise au même dénominateur, s'étend au calcul littéral à condition que les dénominateurs présents dans l'expression littérale soient non nuls.

Avant de commencer tout calcul avec des quotients, il faut donc déterminer les valeurs interdites.

Exercice 6 : Pour chacune des expressions suivantes, déterminer les éventuelles valeurs interdites puis les écrire sous un même dénominateur $A=1+\frac{x+1}{x-3}$ et $B=\frac{2x-3}{3x+7}-\frac{5x-1}{4x+1}$.

III. Résoudre une équation

1. Équations équivalentes

Définition : Deux équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont le **même ensemble de solutions**.

Propriété : Étant donné une équation, on obtient une **équation équivalente** lorsque :

- on additionne ou on soustrait une même expression aux deux membres de l'équation
- on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par une même expression non nulle.

Exercice 7 : Résoudre l'es équations suivantes $4x-7=13-9x$ et $5x-1-(3-6x)=3(2x-1)$

2. Équation produit

Propriété : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$$A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Exercice 8 : Résoudre les équations suivantes

$$(x+5)(3-4x)=0$$

$$(3-2x)^2=25$$

$$(7-x)^2=(5x-1)^2$$

Exercice 9 : f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x)=(2-x)(1-3x)+4x(1-3x)$.
Déterminer les valeurs exactes des antécédents de 0 par f .

3. Équation quotient

Propriétés:

- Une expression de la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$ n'est calculable que lorsque $B(x) \neq 0$
- L'équation-quotient $\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ et $B(x) \neq 0$

4. Équation de la forme $x^2=k$

Propriété : On considère l'équation $x^2=k$ avec $k \in \mathbb{R}$

- 1^{er} cas : si $k < 0$ alors l'équation $x^2=k$ n'admet aucune solution
- 2^{ème} cas : si $k = 0$ alors l'équation $x^2=k$ admet une seule solution : 0
- 3^{ème} cas : si $k > 0$ alors l'équation $x^2=k$ admet deux solutions : \sqrt{k} et $-\sqrt{k}$

Remarque : En mathématiques, on utilise bon nombre de symboles.

Parmi ces symboles, on utilise notamment le signe \Leftrightarrow qui signifie « équivalent à »

Démonstration :

1^{er} cas : Si $k < 0$ alors l'équation $x^2=k < 0$ n'admet aucune solution car un carré est toujours positif ou nul.

2^{ème} cas : Si $k = 0$ alors $x^2=0 \Leftrightarrow x \times x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $x^2=0$ admet une seule solution : 0

3^{ème} cas : Si $k > 0$ alors $x^2=k \Leftrightarrow x^2-k=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{k})(x+\sqrt{k})=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{k}$ ou $x=-\sqrt{k}$ donc $x^2=k > 0$ admet deux solutions : \sqrt{k} et $-\sqrt{k}$

#

Exercice 10 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations $x^2=64$ et $(2x-5)^2=16$

5. Équation de la forme $\sqrt{x}=k$

Propriété : On considère l'équation $\sqrt{x}=k$ avec $k \in \mathbb{R}$

- 1^{er} cas : si $k < 0$ alors l'équation $\sqrt{x}=k$ n'admet aucune solution
- 2^{ème} cas : si $k = 0$ alors l'équation $\sqrt{x}=k$ admet une seule solution : 0
- 3^{ème} cas : si $k > 0$ alors l'équation $\sqrt{x}=k$ admet une seule solution : k^2

Exercice 11 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations $\sqrt{x}=5$ et $\sqrt{x}=-1$