Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}, x>0$. Montrer que l'inverse de $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ est $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}, x>0$. L'inverse de $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ est $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

Or, $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\times(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2=x+1-x=1$

donc l'inverse de $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ est $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $a>b>0$. Montrer que l'inverse de $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ est $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$.

Correction

Soit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $a>b>0$. L'inverse de $\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$ est $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$.

Or, $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}\right)\times\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}\right)=\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a-b}^2}=\frac{a-b}{a-b}=1$ donc l'inverse de $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ est $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $a>b>0$ et $C=\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$.

1. Calculer C^2 .
2. En déduire une expression plus simple de C .

Correction

1. $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $a>b>0$. On a :

$$C^2=\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2+2\times\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\times\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}+\left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2$$

$$C^2=\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2+2\times\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\times\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}+\left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2$$
$$C^2=a+\sqrt{a^2-b^2}+2\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}+a-\sqrt{a^2-b^2}=2a+2b$$

2. $C^2=2(a+b)$ et $C>0$ donc $C=\sqrt{2(a+b)}$

Exercice 4

Factoriser chacune des expressions suivantes en effectuant une première factorisation avant de factoriser la totalité de l'expression.

$A(x)=(x+3)(x-1)+2x+6$

$B(x)=3x^2+2x+(3x+2)^2$

$C(x)=2(x-3)^2-8$

$D(x)=(4x+3)^2-4x-3$

$E(x)=2x-3+(3-2x)(x+5)$

$F(x)=(x-5)(2x+3)-x^2+25$

$G(x)=(6x-10)(4-x)-(5-3x)^2$

$H(x)=75-(3x-6)(x-2)$

Correction

$A(x)=(x+3)(x-1)+2x+6=(x+3)(x-1)+2(x+3)=(x+3)\left(((x-1)+2)\right)=(x+3)(x+1)$

$B(x)=3x^2+2x+(3x+2)^2=x(3x+2)+(3x+2)^2=(3x+2)\left(x+(3x+2)\right)=(3x+2)(4x+2)$
$B(x)=(3x+2)\times 2\times(2x+1)=2(3x+2)(2x+1)$

$C(x)=2(x-3)^2-8=2\left((x-3)^2-4\right)=2\left((x-3)^2-2^2\right)=2(x-3-2)(x-3+2)=2(x-5)(x-1)$

$D(x)=(4x+3)^2-4x-3=(4x+3)^2-(4x+3)\times 1=(4x+3)\left((4x+3)-1\right)$
$D(x)=(4x+3)(4x+2)=2(4x+3)(2x+1)$

$E(x)=2x-3+(3-2x)(x+5)=(2x-3)-(2x-3)(x+5)=(2x-3)\times 1-(2x-3)(x+5)$
$E(x)=(2x-3)\left(1-(x+5)\right)(2x-3)(1-x-5)=(2x-3)(-x-4)=-(2x-3)(x+4)$

$F(x)=(x-5)(2x+3)-x^2+25=(x-5)(2x+3)-(x^2-25)=(x-5)(2x+3)-(x-5)(x+5)$
$F(x)=(x-5)\left((2x+3)-(x+5)\right)=(x-5)(2x+3-x-5)=(x-5)(x-2)$

$G(x)=(6x-10)(4-x)-(5-3x)^2=2(3x-5)(4-x)-(3x-5)^2$ car $(5-3x)^2=(3x-5)^2$
$G(x)=(3x-5)\left(2(4-x)-(3x-5)\right)=(3x-5)(8-2x-3x+5)=(3x-5)(-5x+13)$

$H(x)=75-(3x-6)(x-2)=75-\left(3(x-2)(x-2)\right)=75-3(x-2)^2=3\left(25-(x-2)^2\right)$
$H(x)=3\left(5^2-(x-2)^2\right)=3[(5-(x-2))\left(5+(x-2)\right)=3((5-x+2)(5+x-2))$
$H(x)=3(-x+7)(x+3)$

Exercice 5

Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\frac{x+2}{x}+\frac{4}{x+4}=\frac{8}{x(x+4)} \qquad 3x^2+2x+(3x+2)^2=0 \qquad \frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}=\frac{8}{x(x-2)}$$

Correction

- <u>Résolution de l'équation</u> $\frac{x+2}{x}+\frac{4}{x+4}=\frac{8}{x(x+4)}$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$

L'équation $\frac{x+2}{x}+\frac{4}{x+4}=\frac{8}{x(x+4)}$ est définie pour $x\neq 0$ et $x\neq -4$.

Soit $x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ et $x\neq -4$. On a :

$$\frac{x+2}{x}+\frac{4}{x+4}=\frac{8}{x(x+4)}\Leftrightarrow\frac{(x+2)\times(x+4)+4x}{x(x+4)}=\frac{8}{x(x+4)}\Leftrightarrow\frac{x^2+4x+2x+8}{x(x+4)}=\frac{8}{x(x+4)}$$

$$\frac{x^2+4x+2x+8}{x(x+4)}=\frac{8}{x(x+4)}\Leftrightarrow x^2+6x+8=8\Leftrightarrow x^2+6x=0\Leftrightarrow x(x+6)=0$$

$$x(x+6)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x+6=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-6$$

Seule la solution $x=-6$ convient car l'équation n'est pas définie pour $x=0$.

Conclusion : $S=\{-6\}$

- <u>Résolution de l'équation</u> $3x^2+2x+(3x+2)^2=0$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$

L'équation $3x^2+2x+(3x+2)^2=0$ est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$3x^2+2x+(3x+2)^2=0\Leftrightarrow x(3x+2)+(3x+2)^2=0\Leftrightarrow(3x+2)(x+(3x+2))=0\Leftrightarrow(3x+2)(4x+2)=0$$

$$(3x+2)(4x+2)=0\Leftrightarrow 3x+2=0 \text{ ou } 4x+2=0\Leftrightarrow 3x=-2 \text{ ou } 4x=-2\Leftrightarrow x=\frac{-2}{3} \text{ ou } x=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

Conclusion : $S=\{-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\}$

- <u>Résolution de l'équation</u> $\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}=\frac{8}{x(x-2)}$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$

L'équation $\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}=\frac{8}{x(x-2)}$ est définie pour $x\neq 0$ et $x\neq 2$.

Soit $x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ et $x\neq 2$. On a :

$$\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}=\frac{8}{x(x-2)}\Leftrightarrow\frac{(x-2)^2+4x}{x(x-2)}=\frac{8}{x(x-2)}\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+4+4x}{x(x-2)}=\frac{8}{x(x-2)}$$

$$\frac{x^2-4x+4+4x}{x(x-2)}=\frac{8}{x(x-2)}\Leftrightarrow x^2+4=8\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}$$

Or $\sqrt{2}\neq 0 ; \sqrt{2}\neq 2 ; -\sqrt{2}\neq 0$ et $-\sqrt{2}\neq 2$

Conclusion : $S=\{\sqrt{2} ; -\sqrt{2}\}$

Exercice 6 – Triplets Pythagoriciens

$(a ; b)$ désigne un couple d'entiers naturels tels que $a\geqslant b$.

On considère un triangle MNP de côtés $MN=a^2-b^2 ; NP=2ab$ et $MP=a^2+b^2$.

Montrer que MNP est toujours un triangle rectangle.

Correction

Dans le triangle MNP, le plus grand côté est $MP=a^2+b^2$.

En effet, $a^2+b^2\geqslant a^2-b^2$ et $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$ donc $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

D'une part, $MP^2=(a^2+b^2)^2=a^4+2a^2b^2+b^4$

D'autre part, $MN^2+NP^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4$

Donc $MN^2=MP^2+PN^2$

Donc MNP est rectangle en N d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice 7

1. En observant que $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$, développer et réduire $(a+b)^3$.
2. De même développer et réduire $(a-b)^3$
3. En déduire la forme développée et réduite de $(x+1)^3$ et $(x-1)^3$

Correction

1. $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
   $(a+b)^3=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
   $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2. $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$
   $(a-b)^3=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$
   $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

3. $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1^3=x^3+3x^2+3x+1$
   $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1^3=x^3-3x^2+3x-1$

Exercice 8

En observant que $(a+b)^4=(a+b)^2(a+b)^2$, développer et réduire $(a+b)^4$.

Correction

$(a+b)^4=(a+b)^2(a+b)^2=(a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)$

$(a+b)^4=a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^3b+4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2+2ab^3+b^4$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$