Exercice 1

1. Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}, e^{2x}+e^{x}>0$
2. Déterminer le signe de $-e^{x}-2$ sur $\mathbb{R}$

Correction

1. $\forall x\in\mathbb{R}, e^{2x}+e^{x}=e^{x}(e^{x}+1)$
   $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x}>0$ donc $e^{x}+1>1>0$ donc $e^{x}(e^{x}+1)>0$ donc $e^{2x}+e^{x}>0$

2. $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x}>0$ donc $e^{x}+2>2$ donc $-(e^{x}+2)<-2<0$ donc $-e^{x}-2<0$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$e^{x^2}=e^{x}$ $\quad$ $e^{-2x}-1=0$ $\quad$ $e^{5x+1}=e\times e^{2x}$

$e^{5x}=\dfrac{e^{-x}}{e}$ $\quad$ $(e^{x}-e^{2})(e^{-x}+5)=0$ $\quad$ $3e^{3x-42}+1=4$

Correction

- $e^{x^2}=e^{x}\Leftrightarrow x^{2}=x\Leftrightarrow x^{x}-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

- $e^{-2x}-1=0\Leftrightarrow e^{-2x}=1\Leftrightarrow e^{-2x}=e^{0}\Leftrightarrow -2x=0\Leftrightarrow x=0$

- $e^{5x+1}=e\times e^{2x}\Leftrightarrow e^{5x+1}=e^{1+2x}\Leftrightarrow 5x+1=2x+1\Leftrightarrow 3x=0\Leftrightarrow x=0$

- $e^{5x}=\dfrac{e^{-x}}{e}\Leftrightarrow e^{5x}=e^{-x-1}\Leftrightarrow 5x=-x-1\Leftrightarrow 6x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{6}$

- $(e^{x}-e^{2})(e^{-x}+5)=0\Leftrightarrow e^{x}-e^{2}=0$ ou $e^{-x}+5=0$
  $(e^{x}-e^{2})(e^{-x}+5)=0\Leftrightarrow e^{x}=e^{2}$ ou $e^{-x}=-5\,(\textit{impossible car } \forall x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0)$
  $(e^{x}-e^{2})(e^{-x}+5)=0\Leftrightarrow x=2$

- $3e^{3x-42}+1=4\Leftrightarrow 3e^{3x-42}=3\Leftrightarrow e^{3x-42}=1\Leftrightarrow e^{3x-42}=e^{0}\Leftrightarrow 3x-42=0\Leftrightarrow x=\dfrac{42}{3}=14$

Exercice 3

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$-2e^{2x}+e^{x}+1=0$ $\qquad$ $-5e^{2x}+3e^{x}+2=0$

2. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$

$-2e^{2x}+e^{x}+1<0$ $\qquad$ $-5e^{2x}+3e^{x}+2\geqslant 0$

Correction

1. (a) Résolution de $-2e^{2x}+e^{x}+1=0$ dans $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}, -2e^{2x}+e^{x}+1=-2(e^{x})^2+e^{x}+1$. On pose $X=e^{x}$.

On déduit que l'équation $-2e^{2x}+e^{x}+1=0$ est équivalente à $-2X^2+X+1=0$ avec $X>0$.
$-2X^2+X+1=0$ est une équation du 2nd degré admettant $X_1=1$ pour racine évidente.
La deuxième racine X_2 vérifie $X_1\times X_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{-2}$ donc $X_2=-\frac{1}{2}<0$ qui ne peut convenir.

On déduit que l'équation $-2X^2+X+1=0$ avec $X>0$ a une seule solution $X=1$.
Or, $X=1\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow e^{x}=e^{0}\Leftrightarrow x=0$

Conclusion : L'équation $-2e^{2x}+e^{x}+1=0$ admet une seule solution, 0.

(b) Résolution de $-5e^{2x}+3e^{x}+2=0$ dans $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}, -5e^{2x}+3e^{x}+2=-5(e^{x})^2+3e^{x}+2$ On pose $X=e^{x}$.

On déduit que l'équation $-5e^{2x}+3e^{x}+2=0$ est équivalente à $-5X^2+3X+2=0$ avec $X>0$.
$-5X^2+3X+2=0$ est une équation du 2nd degré admettant $X_1=1$ pour racine évidente.
La deuxième racine X_2 vérifie $X_1\times X_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{-5}$ donc $X_2=-\frac{2}{5}<0$ qui ne peut convenir.

On déduit que l'équation $-5X^2+3X+2=0$ avec $X>0$ a une seule solution $X=1$.
Or, $X=1\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow e^{x}=e^{0}\Leftrightarrow x=0$

Conclusion : L'équation $-5e^{2x}+3e^{x}+2=0$ admet une seule solution, 0.

2. (a) D'après l'étude précédente, on déduit que $-2X^2+X+1<0$ pour $X<-\frac{1}{2}$ ou $X>1$ c'est à dire à l'extérieur des racines car le coefficient des X^2 est $a=-2<0$.
On déduit que $-2e^{2x}+e^x+1<0$ pour $e^x<-\frac{1}{2}$ ou $e^x>1 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $S=]0;+\infty[$

(b) D'après l'étude précédente, on déduit que $-5X^2+3X+2\geqslant 0$ pour $-\frac{2}{5}\leqslant X\leqslant 1$ c'est à dire à l'extérieur des racines car le coefficient des X^2 est $a=-5<0$.
On déduit que $-5e^{2x}+3e^x+2\geqslant 0$ pour $-\frac{2}{5}\leqslant e^x\leqslant 1 \Leftrightarrow e^x\leqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant 0$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $S=]-\infty;0]$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$

$1 \leqslant e^{-3x}$ $\quad e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leqslant 0$ $\quad \dfrac{e^x - x e^x}{e^x + 1} > 0$

Correction

- $1 \leqslant e^{-3x} \Leftrightarrow e^0 \leqslant e^{-3x} \Leftrightarrow 0 \leqslant -3x \Leftrightarrow 0 \geqslant x \Leftrightarrow x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0]$
- $e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leqslant e^{7x-8} \Leftrightarrow -x^2 \leqslant 7x - 8 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+8) \geqslant 0$
  $e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -8 \text{ ou } x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -8] \cup [\ 1 ; +\infty[$
- $\dfrac{e^x - x e^x}{e^x + 1} > 0 \Leftrightarrow e^x - x e^x > 0 \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 0$
  $\dfrac{e^x - x e^x}{e^x + 1} > 0 \Leftrightarrow e^x (1-x) > 0 \Leftrightarrow (1-x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \left(\text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \right)$
  $\dfrac{e^x - x e^x}{e^x + 1} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 1[$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=10e^{-0{,}231x}$.

1. Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+3)=e^{-0{,}693}f(x)$.
2. Sachant que $e^{-0{,}693}\approx 0{,}5$, compléter le tableau de valeurs suivants :

x	0	3	6	9	12
$f(x)$					

3. Construire la courbe C_f dans un repère puis vérifier la cohérence de votre tracé à l'aide du mode Graph de votre calculatrice.

Correction

1.
$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x+3)=10e^{-0{,}231(x+3)}=10e^{-0{,}231x-0{,}693}=10e^{-0{,}231x}\times e^{-0{,}693}=f(x)\times ep^{-0{,}693}=e^{-0{,}693}f(x)$$

2. $f(0)=10$ et $e^{-0{,}693}\approx 0{,}5$ d'où :

x	0	3	6	9	12
$f(x)$	10	5	2,5	1,25	0,625

3.