Exercice 1 :

1. $f, g et h$ sont trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\exp(x)+x$, $g(x)=x\exp(x)$ et $h(x)=\exp(x+2)$. Déterminer le sens de variation de ces trois fonctions.
2. La fonction k est définie sur $]0;+\infty[$ par $k(x)=\dfrac{\exp(x)}{x}$.

   Déterminer le sens de variation de k sur $]0;+\infty[$.

Correction

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\exp(x)+x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ (somme de la fonction x → exp(x) et de la fonction linéaire x→ x).
   Ou bien
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\exp(x)+1>0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=1\times\exp(x)+x\exp(x)=(x+1)\exp(x)$.
   Or, $\forall x\in\mathbb{R}, \exp(x)>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(x+1)$.
   Or, $x+1\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -1$ et $x+1\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant -1$
   On déduit que :
   $g'(x)\leqslant 0 \text{ sur }]-\infty;-1]$ et $g'(x)\geqslant 0 \text{ sur } [-1;+\infty[$ donc g est croissante sur $[-1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;-1]$.

   La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\exp(x+2)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ (composée de la fonction x → exp(x) et de la fonction affine x→ x+2).
   Ou bien
   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, h'(x)=\exp(x+2)>0$ donc h est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction k est définie sur $]0;+\infty[$ par $k(x)=\dfrac{\exp(x)}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivable sur $]0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.
   $\forall x>0, k'(x)=\dfrac{\exp(x)\times x-1\times\exp(x)}{x^2}=\dfrac{\exp(x)(x-1)}{x^2}$
   Or $\forall x>0, \exp(x)>0$ et $x^2>0$ donc $k'(x)$ est du signe de $(x-1)$.
   $x-1\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 1$ et $x-1\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant 1$ donc $k'(x)\leqslant 0 \text{ sur }]0;1]$ et $k'(x)\geqslant 0 \text{ sur } [1;+\infty[$
   donc k est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

Exercice 2 :

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp(x))^2 = \exp(2x)$
2. Soit $s : x \to \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ et $c : x \to \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$
   (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = c(x) + s(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = c(x) - s(x)$
   (b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$
   (c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, c(2x) = (c(x))^2 + (s(x))^2$ et $s(2x) = 2s(x)c(x)$

Correction

1. $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$ donc pour $a = x$ et $b = x$ on a :
   $\exp(x+x) = \exp(x) \times \exp(x) \Leftrightarrow \exp(2x) = (\exp(x))^2$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$c(x) + s(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) + \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$
$$c(x) + s(x) = \frac{1}{2}\exp(x) + \frac{1}{2}\exp(-x) + \frac{1}{2}\exp(x) - \frac{1}{2}\exp(-x)$$
$$c(x) + s(x) = \frac{1}{2}\exp(x) + \frac{1}{2}\exp(x)$$

$$c(x) - s(x) = \left(\frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))\right) - \left(\frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))\right)$$
$$c(x) - s(x) = \frac{1}{2}\exp(x) + \frac{1}{2}\exp(-x) - \frac{1}{2}\exp(x) + \frac{1}{2}\exp(-x)$$
$$c(x) - s(x) = \frac{1}{2}\exp(-x) + \frac{1}{2}\exp(-x) = \exp(-x)$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(c(x))^2 = \frac{1}{4}\left((\exp(x))^2 + 2\exp(x)\exp(-x) + (\exp(-x))^2\right) = \frac{1}{4}\left((\exp(x))^2 + 2 + (\exp(-x))^2\right)$$
$$(s(x))^2 = \frac{1}{4}\left((\exp(x))^2 - 2\exp(x)\exp(-x) + (\exp(-x))^2\right) = \frac{1}{4}\left((\exp(x))^2 - 2 + (\exp(-x))^2\right)$$

d'où

$$(c(x))^2 - (s(x))^2 = \frac{1}{4}(2 - (-2)) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(c(x))^2 + (s(x))^2 = \frac{1}{4}\left(2(\exp(x))^2 + 2(\exp(-x))^2\right) = \frac{1}{2}\left((\exp(x))^2 + (\exp(-x))^2\right)$$
$$(c(x))^2 + (s(x))^2 = \frac{1}{2}\left((\exp(2x)) + (\exp(-2x))\right) = c(2x)$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$2s(x)c(x)=2\times\frac{1}{2}(\exp(x)-\exp(-x))\times\frac{1}{2}(\exp(x)+\exp(-x))$$

$$2s(x)c(x)=\frac{1}{2}(\exp(x)-\exp(-x))\times(\exp(x)+\exp(-x))$$

$$2s(x)c(x)=\frac{1}{2}\left((\exp(x))^2-(\exp(-x))^2\right)=\frac{1}{2}(\exp(2x)-\exp(-2x))=s(2x)$$

Exercice 3 :

compléter les égalités suivantes :

$e^2\times e^5=e^{\cdots}$ $\quad e^{-3}=\frac{1}{\cdots}$ $\quad \frac{e^9}{e^6}=e^{\cdots}$ $\quad (e^8)^5=e^{\cdots}$

Correction

$e^2\times e^5=e^7$ $\quad e^{-3}=\frac{1}{e^3}$ $\quad \frac{e^9}{e^6}=e^3$ $\quad (e^8)^5=e^{40}$

Exercice 4 :

1. Simplifier :

$e^x \times e^{-x}$ $(e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2$ $\dfrac{e^{3x} \times e^{4x}}{e^{2x-1}}$ $\dfrac{e^{2-3x}}{e^{x+1}}$

2. Établir que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{e^x+1}{e^x-1} = \dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ $\forall x \neq 0, \dfrac{e^x}{e^x-1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$e^{-x+7} = e^{x+3}$ $e^{2-x} = 1$ $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ $e^{2x} \leqslant e^x$ $e^{2x} \leqslant 1$

Correction

1.

$e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$ $(e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2 = e^{4x} \times e^{-2x} = e^{2x}$

$\dfrac{e^{3x} \times e^{4x}}{e^{2x-1}} = \dfrac{e^{7x}}{e^{2x-1}} = e^{7x-(2x-1)} = e^{7x-2x+1} = e^{5x+1}$ $\dfrac{e^{2-3x}}{e^{x+1}} = e^{(2-3x)-(x+1)} = e^{2-3x-x-1} = e^{-4x+1}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

- $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \dfrac{1}{e^{-x}+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

- $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} = \dfrac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1-e^{-x})} = \dfrac{(1+e^{-x})}{(1-e^{-x})}$

Soit $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. On a :

- $\dfrac{e^x}{e^x-1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{e^{2x}-1} = \dfrac{2e^x}{e^{2x}-1} = \dfrac{2e^x}{e^x(e^x-e^{-x})} = \dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$

3.

- $e^{-x+7} = e^{x+3} \Leftrightarrow -x+7 = x+3 \Leftrightarrow 4 = 2x \Leftrightarrow x = 2$
  $e^{2-x} = 1 \Leftrightarrow e^{2-x} = e^0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$
  Conclusion : $S = \{2\}$

- $e^{2x}+2e^{x}-3=0 \Leftrightarrow (e^{x})^2+2e^{x}-3=0 \Leftrightarrow X^2+2X-3=0$ avec $X=e^{x}$
  $X_1=1$ est racine évidente de $X^2+2X-3=0$ donc la deuxième racine est
  $X_2=\dfrac{c}{a}=-3$. Or $X=e^{x}>0$ donc seule la solution $X=1$ peut convenir.
  $X=1 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow e^{x}=e^{0} \Leftrightarrow x=0$

  Conclusion : $S=\{0\}$

- $e^{2x} \leqslant e^{x} \Leftrightarrow 2x \leqslant x \Leftrightarrow x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0]$

- $e^{2x} \leqslant 1 \Leftrightarrow e^{2x} \leqslant e^{0} \Leftrightarrow 2x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0]$

Exercice 5 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{3x+2}$. Étudier les variations de f .

Correction

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{3x+2}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ (composée de la fonction x → exp(x) et la fonction affine x → 3x+2)

Autre méthode

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{3x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=3e^{3x+2}>0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.