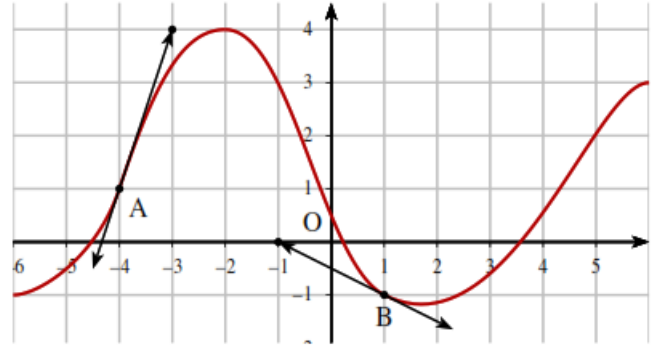


## La calculatrice est autorisée

## Exercice 1

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $C_f$  sa courbe ci-dessous.

1. Par lecture graphique, déterminer  $f'(-4)$  et  $f'(1)$ .
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T_A$  au point  $A(-4;1)$ .
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T_B$  au point  $B(1;-1)$ .



## Exercice 2

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1.  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 6x^2 + 7$ .
2.  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ .
3.  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ .
4.  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$ .

## Exercice 3

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[-3; 3]$  par  $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 1$ .

1. Déterminer  $f'(x)$  que l'on factorisera.
2. Résoudre  $f'(x) = 0$  puis étudier le signe de  $f'(x)$  à l'aide d'un tableau de signes.
3. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-3; 3]$ .  
On donnera les valeurs de  $f(-3)$  et  $f(3)$  ainsi que les extremums.
4. Déterminer l'équation de la tangente  $T_1$  au point d'abscisse 1.

## Exercice 4

Un artisan fabrique des vases. Sa capacité de production est limitée à 60 vases. Le coût de production de  $x$  vases, en euros, est modélisé par la fonction  $C$  définie sur  $[0; 60]$  par  $C(x) = x^2 - 10x + 500$ .  
Chaque vase est vendu 50€. Les recettes sont modélisées par une fonction  $R$  sur  $[0; 60]$ .

1. Calculer le coût et la recette réalisés lorsque l'artisan produit et vend 40 vases.
2. Quel est alors le bénéfice de l'artisan ?
3. Le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est modélisé par la fonction  $B$  sur  $[0; 60]$  par  $B(x) = R(x) - C(x)$ .
  - a) Montrer que l'on peut mettre  $B(x)$  sous la forme  $B(x) = (10 - x)(x - 50)$ .
  - b) Déterminer le nombre de vases à produire et à vendre pour que l'artisan réalise un bénéfice (positif).
  - c) Déterminer  $B'(x)$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $B$  sur  $[0; 60]$  et en déduire le bénéfice maximum et le nombre de vases à produire et à vendre pour le réaliser.

**Exercice 5**

Un jeu consiste à combattre en duel soit un monstre A, soit un monstre B. On a 4 chances sur 5 d'affronter le monstre A. Le joueur gagne contre le monstre A dans 30 % des cas, et gagne contre le monstre B dans 25 % des cas. Le joueur lance une partie. On considère les événements :

- A : « Le joueur affronte le monstre A »
- B : « Le joueur affronte le monstre B »
- V : « Le joueur est victorieux »

1. Construire un arbre de probabilité.
2. Déterminer  $P_B(\bar{V})$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
3. Montrer que  $P(B \cap V) = \frac{1}{20}$ .
4. Calculer  $P(V)$ .
5. Calculer la probabilité d'avoir combattu le monstre B sachant que le joueur est victorieux.

## Correction

## Exercice 1

1. Par lecture graphique,  $f'(-4)=3$  et  $f'(1)=-\frac{1}{2}$ .
2. Une équation de  $T_A$  est de la forme  $y=3x+p$ .  
Or,  $A(-4;1)\in(T_A)$  donc  $1=3\times(-4)+p$  donc  $p=1+12=13$ .

Conclusion :  $T_A: y=3x+13$ .

3. Une équation de  $T_B$  est de la forme  $y=-\frac{1}{2}x+p$ .  
Or,  $B(1;-1)\in(T_B)$  donc  $-1=-\frac{1}{2}\times 1+p$  donc  $p=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ .  
Conclusion :  $T_B: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ .

## Exercice 2

1.  $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{3}{4}\times 4x^3-6\times 2x=3x^3-12x$ .
2.  $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}, f'(x)=\frac{(2x+1)\times(x-1)-1\times(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2}$   
 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}, f'(x)=\frac{2x^2-2x+x-1-x^2-x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$
3.  $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}, f'(x)=\frac{-(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-2x-2}{(x^2+2x-3)^2}$ .
4.  $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=2x(x^3-2x)+(3x^2-2)(x^2+1)=2x^4-4x^2+3x^4+3x^2-2x^2-2=5x^4-3x^2-2$ .

## Exercice 3

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[-3;3]$  par  $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+1$ .

1.  $\forall x\in[-3;3], f'(x)=-\frac{1}{4}\times 4x^3+2\times 2x=-x^3+4x=x(-x^2+4)=x(4-x^2)=x(2-x)(2+x)$

2.  $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$  ou  $2-x=0$  ou  $2+x=0\Leftrightarrow x=0$  ou  $x=2$  ou  $x=-2$

Étude du signe de  $2-x$  et  $2+x$  sur  $\mathbb{R}$

$$2-x=0\Leftrightarrow -x=-2\Leftrightarrow x=2 \text{ et } 2-x>0\Leftrightarrow -x>-2\Leftrightarrow x<2$$

$$2+x=0\Leftrightarrow x=-2 \text{ et } 2+x>0\Leftrightarrow x>-2$$

On déduit le tableau de signes de  $f'(x)$  sur  $[-3;3]$  :

$x$	-3	-2	0	2	3
$x$	-	-	0	+	+
$(2-x)$	+	+	+	0	-
$(2+x)$	-	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+

3. On déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $[-3;3]$  :

$x$	-3		-2		0		2		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	-1,25	↗	5	↘	1	↗	5	↘	-1,25

$$f(-3) = -1,25 = -\frac{5}{4}; f(-2) = 5; f(0) = 1; f(2) = 5 \text{ et } f(3) = -1,25 = -\frac{5}{4}$$

4.  $T_1: y = f'(1)(x-1) + f(1)$  avec  $f'(1) = 3$  et  $f(1) = \frac{11}{4}$

$$T_1: y = 3(x-1) + \frac{11}{4}$$

$$T_1: y = 3x - 3 + \frac{11}{4}$$

$$T_1: y = 3x - \frac{1}{4}$$

**Exercice 4**

1.  $C(40) = 40^2 - 10 \times 40 + 500 = 1600 - 400 + 500 = 1700 \text{ €}$  et  $R(40) = 40 \times 50 = 2000 \text{ €}$

2. Lé bénéfice vaut alors  $B(40) = 2000 - 1700 = 300 \text{ €}$

3. a)  $B(x) = R(x) - C(x) = 50x - (x^2 - 10x + 500) = 50x - x^2 + 10x - 500 = -x^2 + 60x - 500$

Or,  $(10-x)(x-50) = 10x - 500 - x^2 + 50x = -x^2 + 60x - 500 = B(x)$

Conclusion :  $\forall x \in [0;60], B(x) = (10-x)(x-50)$

b)  $B(x) = (10-x)(x-50)$  est une fonction polynôme du second degré. Sa forme factorisée est

$$B(x) = -(x-10)(x-50) . \text{ Ses racine sont donc } 10 \text{ } x_1 = 10 \text{ et } x_2 = 50 .$$

Son coefficient des  $x^2$  vaut  $a = -1 < 0$  d'où le tableau de signes de  $B(x)$  sur  $[0;60]$  :

$x$	0		10		50		60
$(-1)$		-		-		-	
$(x-10)$		-	0	+		+	
$(x-50)$		-		-	0	+	
$B(x)$	-500	-	0	+	0	-	-500

Conclusion :  $B(x) > 0 \Leftrightarrow 10 < x < 50$

c) Déterminer  $\forall x \in [0;60], B'(x) = -2x + 60$

$$B'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 60 = 0 \Leftrightarrow -2x = -60 \Leftrightarrow x = \frac{-60}{-2} = 30$$

$$B'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 60 > 0 \Leftrightarrow -2x > -60 \Leftrightarrow x < 30$$

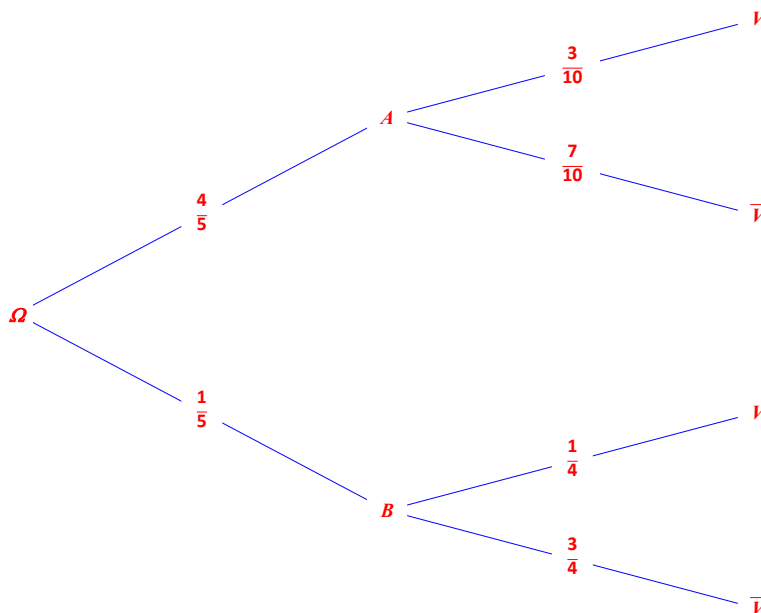
d'où le tableau de variations de  $B(x)$  sur  $[0;60]$  :

$x$	0		30		60
$B'(x)$		+	0	-	
$B(x)$	-500	↗	400	↘	-500

Conclusion : le bénéfice est maximal lorsque le nombre de vases produits et vendus est égal à 30 et vaut alors  $B(30) = 400\text{€}$

### Exercice 5

1. Construire un arbre de probabilité.



2.  $P_B(\bar{V}) = 1 - P_B(V) = 1 - 0,25 = 0,75$
3.  $P(B \cap V) = P(B) \times P_B(V) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ .
4. A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :  

$$P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B) = P(A) \times P_A(V) + P(V \cap B)$$

$$P(V) = \frac{4}{5} \times 0,3 + \frac{1}{20} = 0,8 \times 0,3 + 0,05 = 0,24 + 0,05 = 0,29$$
5. 
$$P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{29}{100}} = \frac{1}{20} \times \frac{100}{29} = \frac{5}{29}$$