La calculatrice est autorisée

Exercice 1

Calculer $S=1+2+2^2+...+2^{10}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de 1[er] terme $u_0=-4$ et de raison $q=3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. Exprimer u_n en fonction de n et calculer le huitième terme de la suite.
3. Déterminer le sens de variation de la suite.
4. Calculer $S=u_0+u_1+...+u_6$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=3u_n+2$ et de 1[er] terme $u_0=3$.

1. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_n+1$.
   Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son 1[er] terme.
3. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis en déduire celle de u_n .
4. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n) puis en déduire celui de la suite (u_n) .

Correction

Exercice 1

$S=1+2+2^2+...+2^{10}=\frac{1-2^{11}}{1-2}=2^{11}-1=2047$.

Exercice 2

1. $u_1=q\times u_0=3\times(-4)=-12, u_2=q\times u_1=3\times(-12)=-36$ et $u_3=q\times u_2=3\times(-36)=-108$.
2. $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0\times q^n=-4\times 3^n$
   Le huitième terme de la suite est $u_7=-4\times 3^7=-8748$.
3. $(u_n)_n$ est une suite géométrique de 1[er] terme $u_0=-4<0$ et de raison $q=3>1$ donc $(u_n)_n$ est strictement décroissante.
4. $S=u_0+u_1+...+u_6=u_0\times\left(\frac{1-q^7}{1-q}\right)=(-4)\times\left(\frac{1-3^7}{1-3}\right)=(-4)\times\left(\frac{1-3^7}{-2}\right)=2\times(1-3^7)=-4372$.

Exercice 3

1. $u_0=3 ; u_1=3\times 3+2=11$ et $u_2=3\times 11+2=35$
   $u_1-u_0=11-3=8$ et $u_2-u_1=35-11=24\neq 8$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

   $\frac{u_1}{u_0}=\frac{11}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{35}{11}$. Or, $11\times 11=121$ et $3\times 35=105\neq 121$ donc les produits en croix ne sont pas égaux donc $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $v_{n+1}=u_{n+1}+1=3u_n+2+1=3u_n+3=3(u_n+1)=3v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $v_0=u_0+1=3+1=4$.
3. On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=v_0\times q^n=4\times 3^n$ et $u_n=v_n-1=4\times 3^n-1$.
4. (v_n) est géométrique de raison $q=3>1$ et de premier terme $v_0=4>0$ donc (v_n) est strictement croissante donc $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}-v_n>0$.
   Or, $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=(v_{n+1}-1)-(v_n-1)=v_{n+1}-v_n>0$ donc (u_n) est également strictement croissante.