

## Chapitre 5 : Suites arithmétiques et géométriques

### I. Suites arithmétiques

#### 1. Définition et propriété

**Définition :** Une suite  $(u_n)_n$  est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en ajoutant un même nombre,  $r$ , appelé raison.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Remarques :

- Une suite arithmétique est définie dès que l'on connaît son 1<sup>er</sup> terme et sa raison
- Si son 1<sup>er</sup> terme est  $u_0$  et sa raison  $r$ , on a alors :

$$u_1 = u_0 + r \quad ; \quad u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r \quad ; \quad u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r \quad \dots \quad u_n = u_0 + nr$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$  donc
  - si  $r > 0$  alors  $(u_n)_n$  est croissante
  - si  $r < 0$  alors  $(u_n)_n$  est décroissante
  - si  $r = 0$  alors  $(u_n)_n$  est constante

**Propriété :** Si une suite  $(u_n)_n$  est arithmétique, de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  et de raison  $r$  alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Exercice 1 : Soit  $(u_n)_n$  une suite arithmétique de raison  $r=2$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = -3$

1. Exprimer  $u_1$  en fonction de  $u_0$  et de  $r$
2. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  puis calculer le centième terme de cette suite.

Exercice 2 : Soit  $(u_n)_n$  une suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^4 - 12n^3 + 22n^2 - 10n + 1$

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les cinq premiers termes de la suite.
2. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 3 : Soit  $(v_n)_n$  une suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -3n + 5$ .

Démontrer que  $(v_n)_n$  est arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

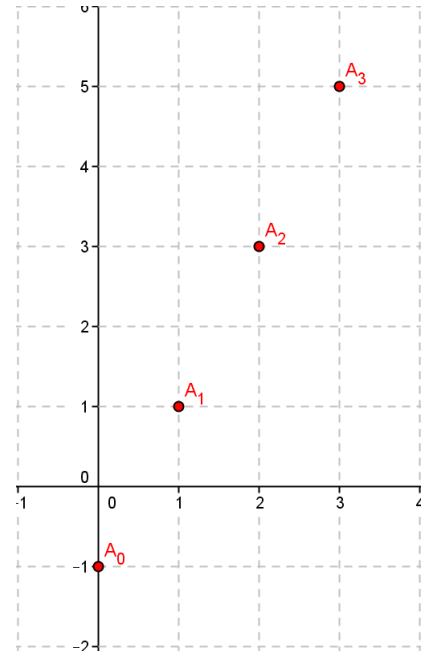
**Propriété :** Plus généralement, si une suite  $(u_n)_n$  est arithmétique on a  $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p)r$

## 2. Représentation graphique

Une suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$  est représentée, dans un repère, par les points  $A_n(n; u_n)$ . Ils appartiennent tous à la droite d'équation  $y = rx + u_0$  puisque pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = nr + u_0$ .

Exemple :  $(u_n)_n$  est une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = -1$  et de raison  $r = 2$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = -1 + 2n$ . Cette suite est représentée par les points  $A_n(n; u_n)$ .

Les points  $A_n(n; u_n)$  appartiennent donc à la droite d'équation  $y = 2x - 1$  (voir ci-contre).



## 3. Somme des termes d'une suite arithmétique

$$\text{Propriété : } \forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1$$

donc en additionnant les deux expressions, on obtient

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1)$$

donc  $S = n(n+1) / 2$

#

**Propriété :** Si une suite  $(u_n)_n$  est arithmétique, alors la somme de  $n$  termes consécutifs de 1<sup>er</sup> terme  $u_p$  et de dernier terme  $u_d$  est égale à  $\frac{n \times (u_p + u_d)}{2}$

Démonstration :

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_d$$

$$S = u_d + u_{d-1} + \dots + u_p$$

donc en additionnant les deux expressions, on obtient

$$2S = (u_p + u_d) + (u_{p+1} + u_{d-1}) + \dots + (u_d + u_p)$$

Or  $\forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n-1, u_{p+k} = u_p + kr$  et  $u_{d-k} = u_d - kr$  donc  $(u_{p+k} + u_{d-k}) = u_p + u_d$

donc  $2S = (u_p + u_d) + (u_p + u_d) + \dots + (u_d + u_p) = n \times (u_p + u_d)$

$$\text{donc } S = \frac{n \times (u_p + u_d)}{2}$$

#

Exercice 4 : En 2011, Anne a reçu 80€ d'étrennes. Chaque année, celles-ci augmentent de 6€.

1. Donner les valeurs  $a_1$  et  $a_2$  des étrennes les années 2012 et 2013.
2. Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  puis déterminer l'expression  $a_n$  des étrennes en 2011+n
3. Quelle somme totale aura-t-elle reçue le 31 décembre 2026 ?

## II. Suites géométriques

### 1. Définition

**Définition :** Une suite  $(u_n)_n$  est dite géométrique lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un même nombre,  $q$ , appelé raison.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n$$

Remarques :

- Une suite géométrique est définie dès que l'on connaît son 1<sup>er</sup> terme et sa raison
- Si son 1<sup>er</sup> terme est  $u_0$  et sa raison  $q$ , on a alors :

$$u_1 = q u_0 \quad ; \quad u_2 = q u_1 = q^2 u_0 \quad ; \quad u_3 = q u_2 = q^3 u_0 \quad ; \quad u_n = q^n u_0$$

Exercice 5 :

- Déterminer les 5 premiers termes de la suite géométrique  $(u_n)_n$  de 1<sup>er</sup> terme  $u_0=1$  et de raison  $q=2$
- Déterminer les 5 premiers termes de la suite géométrique  $(v_n)_n$  de 1<sup>er</sup> terme  $v_0=5$  et de raison  $q=-0,5$

**Propriété :**

- Le terme général d'une suite géométrique  $(u_n)_n$  de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  et de raison  $q$  est  $u_n = u_0 \times q^n$
- Plus généralement, le terme général d'une suite géométrique  $(u_n)_n$  de 1<sup>er</sup> terme  $u_p$  et de raison  $q$  est  $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration :

l'idée intuitive réside dans les égalités suivantes :

$$u_1 = qu_0 ; u_2 = qu_1 = q^2 u_0 ; u_3 = qu_2 = q^3 u_0 ; u_n = q^n u_0$$

La démonstration rigoureuse sera vue en terminale (raisonnement par récurrence)

#

**Propriété :** une suite géométrique  $(u_n)_n$  de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  et de raison  $q$  est monotone ssi  $q \geq 0$

- lorsque  $q = 0$  ou  $q = 1$ , la suite est constante
- lorsque  $u_0 > 0$  et  $q > 1$ , la suite est croissante
- lorsque  $u_0 > 0$  et  $0 < q < 1$ , la suite est décroissante
- lorsque  $u_0 < 0$ , les résultats précédents sont inversés par rapport au cas où  $u_0 > 0$

Remarque : une étude au cas par cas est souvent plus rapide qu'une allocation directe de cette propriété.

Exercice 6 : Soit  $(u_n)_n$  une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $u_0=12$  et de raison  $q=10$  .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et calculer le huitième terme de la suite.
2. Étudier le sens de variation de la suite.

Exercice 7 : Soit  $(u_n)_n$  une suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 5^{n+1}$  .

Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est géométrique et préciser sa raison et son 1<sup>er</sup> terme.

Exercice 8 : La population de la banlieue d'une ville augmente de 4 % par an et celle du centre-ville diminue de 5 % par an. En janvier 2011, elles sont toutes les deux de 50 000 habitants. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $b_n$  et  $c_n$  les populations de la banlieue et du centre-ville l'année  $2011+n$  .

1. Déterminer les populations  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  l'année 2012 puis les populations en 2013.
2. Exprimer  $b_{n+1}$  en fonction de  $b_n$  et en déduire l'expression de  $b_n$  en fonction de  $n$
3. Exprimer  $c_{n+1}$  en fonction de  $c_n$  et en déduire l'expression de  $c_n$  en fonction de  $n$

## 2. Somme des termes d'une suite géométrique

**Propriété :**

- $\forall n \in \mathbb{N}, \text{si } q \neq 1, 1+q+q^2+q^3+\dots+q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \text{si } q = 1, 1+1+1^2+1^3+\dots+1^n = \sum_{k=0}^n 1^k = n+1$

**Démonstration :**

- 1<sup>er</sup> cas :  $q=1$

$$S = 1+1^1+1^2+\dots+1^n = 1+1+1+\dots+1 = (n+1) \times 1 = n+1$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $q \neq 1$

$$S = 1+q+q^2+q^3+q^4+\dots+q^n$$

$$qS = q+q^2+q^3+\dots+q^{n+1}$$

$$\text{donc } S - qS = 1 - q^{n+1} \quad \text{donc } S(1-q) = 1 - q^{n+1} \quad \text{donc } S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \#$$

**Propriété :** Soit  $(u_n)_n$  une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  et de raison  $q$  avec  $q \neq 1$  alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Démonstration :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_0 q^k = u_0 \sum_{k=0}^n q^k = u_0 \times S = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \#$$